



**Titre:** Synthèse de lois de commande pour pots vibrants  
Title: électromagnétiques

**Auteur:** Amin Roubi  
Author:

**Date:** 2013

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Roubi, A. (2013). Synthèse de lois de commande pour pots vibrants  
Citation: électromagnétiques [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal].  
PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/1147/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1147/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Lahcen Saydy, & David Saussié  
Advisors:

**Programme:** génie électrique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE POUR POTS VIBRANTS  
ÉLECTROMAGNÉTIQUES

AMIN ROUBI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)  
JUN 2013

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE POUR POTS VIBRANTS  
ÉLECTROMAGNÉTIQUES

présenté par : ROUBI Amin

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. GOURDEAU Richard, Ph.D., président

M. SAYDY Lahcen, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SAUSSIÉ David, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. LE NY Jérôme, Ph.D., membre

*À mes parents...*

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d’abord à remercier mon directeur de recherche *Lahcen Saydy* d’avoir accepté de diriger et encadrer ce projet de recherche. Son expérience et ses conseils pertinents m’ont permis de réaliser toutes les étapes de ce projet de maîtrise.

Je remercie également mon codirecteur de recherche, *David Saussié*, pour son encadrement, sa motivation, son dynamisme et son suivi constant qui m’ont aidé à mener à terme ce projet de maîtrise. J’ai beaucoup apprécié de travailler avec lui pendant toutes les phases du projet. Je lui souhaite plein de succès dans sa carrière de professeur et chercheur.

J’aimerais également remercier *Anis Hadj Henni* et *Cédric Schmitt* qui m’ont donné l’occasion de travailler sur leur système afin d’appliquer les notions théoriques acquises jusqu’à maintenant dans le domaine du contrôle.

Je tiens aussi à remercier, le personnel administratif, notamment *Suzanne Lebel* et *Nathalie Lévesque* pour leur sympathie et professionnalisme. Je remercie également le personnel technique de la section Automation et Systèmes, particulièrement *Marie-Lyne Brisson*, pour sa disponibilité et assistance pour fournir le matériel et logiciels nécessaires pour le projet.

Je n’oublie pas mes amis de laboratoire avec qui j’ai eu du plaisir à travailler, à partager et à discuter des divers sujets d’automatique et d’actualités, en particulier : Anas, Vincent, Réza, Alexandre, Mohsen, Amir, Japhet et tous ceux qui sont passés par le A429.9.

J’aimerais aussi souligner le support et l’aide de mes amis : Hamza. O, les Sekkats, Mounir, Abdelouahab, Hicham, Nabil, Nassim, Yassine et les membres des équipes de football avec qui je joue chaque semaine (Total Utd, Les Bondjos et Telus Fc).

Enfin, je remercie mes parents pour leur aide, encouragement et soutien inconditionnels. Tout ce que j’ai réalisé et accompli jusqu’ici est le fruit de leurs sacrifices et dévouement. Je leur dédie ce mémoire.

Que ceux qui n’ont pas été cités ci-haut, trouvent également l’expression de ma totale reconnaissance.

## RÉSUMÉ

Nous présentons dans ce mémoire trois stratégies de contrôle dédiées à l'asservissement de pots vibrants électromagnétiques. Ce sont des sources de vibrations utilisées dans les rhéomètres afin de caractériser les propriétés viscoélastiques de matériaux mous, tels que des tissus biologiques.

Les contrôleurs conçus doivent assurer la poursuite du déplacement des pots vibrants pour trois profils de déplacements particuliers. Ces signaux de référence sont de type transitoires et de fréquences variables selon le matériau étudié. De plus, les correcteurs doivent satisfaire les mêmes performances pour toutes les masses des porte-échantillons, ou, en d'autres termes être robustes vis-à-vis les variations des valeurs de ces masses.

On commence par l'élaboration de modèles pour les pots vibrants en fonction des masses des porte-échantillons. Pour ce faire, nous utilisons un processus d'identification pour déterminer chaque paramètre des sources vibrantes et estimer son évolution en fonction des masses utilisées. Nous obtenons ainsi des modèles qui dépendent de la masse.

Ensuite vient le développement de trois stratégies de commande pour deux pots vibrants particuliers. La première stratégie est basée sur un simple contrôleur à retard de phase. Les deuxième et troisième stratégies sont basées sur la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée respectivement. Ce sont deux techniques de contrôle robuste et leur choix est motivé par l'incertitude paramétrique de la masse dans les modèles développés précédemment. Les résultats de simulations et les limitations de chaque stratégie de contrôle sont illustrés et commentés. On finit la partie synthèse par l'évaluation de la robustesse des performances des trois lois de contrôle à l'aide des applications gardiennes et de la  $\mu$ -analyse.

Enfin, les lois de commande sont implantées expérimentalement sur le système physique. On décrit les éléments et les outils choisis pour l'implantation des trois contrôleurs. Les résultats expérimentaux et les limitations des lois de commande sont alors présentées et comparées à ceux obtenus en simulation.

## ABSTRACT

In this report, we present control strategies dedicated to the control of electromagnetic shakers. These systems are used as vibration sources in rheometers in order to characterize the viscoelastic properties of soft materials such as biological tissues.

The controllers are designed to ensure the tracking of three particular displacement profiles. These reference signals are of the transient type with varying frequencies depending on the material being studied. In addition, the controllers must meet the same performances for all the sample holders.

First, we develop models for the shakers under study depending on the sample holder's masses. This is done via an identification process to determine each parameter of the vibrating sources as a function of the aforementioned masses. We thus obtain models that vary according to the sample holder's weight, which is thus treated as an uncertain parameter in control design.

Second, we move to the development of three control strategies for two specific shakers. While the first is based on a simple lag controller, the second and third strategies are based on  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis and structured  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis, respectively. These are two robust control techniques and their choice is motivated by the parametric uncertainty of the mass in the models developed previously. The simulation results and frequency limitations of each control strategy are illustrated and discussed. We finish the design part by evaluating the robustness of all three control laws using guardian map theory and  $\mu$ -analysis.

Finally, the control laws are experimentally tested on the physical system. We describe the software and hardware selected for the implementation of the three controllers. The experimental results and the frequency limitations of the control laws are presented and compared with results obtained by simulation.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	vii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	x
LISTE DES FIGURES . . . . .	xi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xiv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xv
CHAPITRE 1 Introduction . . . . .	1
1.1 Mise en contexte . . . . .	1
1.2 Objectifs du projet . . . . .	2
1.3 Plan du mémoire . . . . .	3
CHAPITRE 2 Éléments du banc de test . . . . .	5
2.1 Le rhéomètre . . . . .	5
2.2 Banc de test . . . . .	5
2.3 Signaux de référence . . . . .	7
2.4 Illustration de la réponse du système . . . . .	9
CHAPITRE 3 Revue de littérature . . . . .	11
3.1 Modélisation des pots vibrants . . . . .	11
3.1.1 Fonctionnement . . . . .	11
3.1.2 Modélisation des pots vibrants électrodynamiques . . . . .	12
3.2 Stratégies de contrôle des pots vibrants . . . . .	14
3.3 Conclusion . . . . .	16



CHAPITRE 4	Identification des paramètres des pots vibrants . . . . .	18
4.1	Introduction . . . . .	18
4.2	Identification paramétrique . . . . .	20
4.2.1	Régression linéaire . . . . .	20
4.2.2	Identification basée sur l'erreur de prédiction . . . . .	21
4.3	Aspects pratiques . . . . .	25
4.3.1	Planification de l'expérience . . . . .	25
4.3.2	Traitement préliminaire des données . . . . .	27
4.3.3	Choix de la structure et validation du modèle . . . . .	27
4.3.4	Outil informatique . . . . .	28
4.4	Description du banc de test . . . . .	28
4.5	Modèles mathématiques des pots vibrants . . . . .	31
4.5.1	Modèle général du pot vibrant . . . . .	31
4.5.2	Modèles simplifiés du pot vibrant . . . . .	32
4.6	Modèle du pot vibrant #1 . . . . .	33
4.6.1	Analyse et traitement des mesures expérimentales . . . . .	33
4.6.2	Paramètres identifiés . . . . .	35
4.7	Modèle du pot vibrant #2 . . . . .	38
4.8	Modèle du pot vibrant #3 . . . . .	41
4.8.1	Analyse et traitement des mesures expérimentales . . . . .	41
4.8.2	Paramètres identifiés . . . . .	43
4.9	Conclusion . . . . .	48
CHAPITRE 5	Conception des contrôleurs . . . . .	50
5.1	Rappels théoriques . . . . .	50
5.1.1	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	50
5.1.2	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée . . . . .	54
5.1.3	Applications gardiennes . . . . .	56
5.1.4	$\mu$ -analyse . . . . .	60
5.2	Contrôle du pot vibrant #1 . . . . .	64
5.2.1	Comportement du système en boucle ouverte . . . . .	64
5.2.2	Contrôleur à retard de phase . . . . .	65
5.2.3	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	67
5.2.4	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structuré . . . . .	70
5.3	Contrôle du pot vibrant #3 . . . . .	71
5.3.1	Comportement du système en boucle ouverte . . . . .	71

5.3.2	Contrôleur à retard de phase . . . . .	71
5.3.3	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	72
5.3.4	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structuré . . . . .	75
5.4	Analyse des contrôleurs . . . . .	76
5.4.1	Performances atteintes . . . . .	76
5.4.2	Robustesse via les applications gardiennes . . . . .	78
5.4.3	Robustesse via la $\mu$ -analyse . . . . .	81
5.5	Conclusion . . . . .	85
CHAPITRE 6 Implantation et validation expérimentale des contrôleurs . . . . .		86
6.1	Implantation du contrôleur en temps réel . . . . .	86
6.1.1	Éléments du système de contrôle . . . . .	86
6.1.2	Schéma de contrôle sous <b>Simulink</b> <sup>®</sup> . . . . .	90
6.2	Résultats expérimentaux obtenus . . . . .	91
6.3	Performances atteintes en expérimentation . . . . .	93
CHAPITRE 7 Conclusions générales . . . . .		99
7.1	Synthèse des travaux . . . . .	99
7.2	Perspectives . . . . .	101
RÉFÉRENCES . . . . .		103
ANNEXES . . . . .		107
A.1	Génération des signaux de référence . . . . .	107
B.1	Résultats numériques d'identification : pot vibrant #1 . . . . .	109
B.2	Résultats numériques d'identification : pot vibrant #2 . . . . .	110
B.3	Résultats numériques d'identification : pot vibrant #3 . . . . .	111
B.4	Données Expérimentales de la réponse fréquentielle . . . . .	113
C.1	Fréquences limites : Pot vibrant #1 . . . . .	116
C.2	Fréquences limites : Pot vibrant #3 . . . . .	119
D.1	Figures des réponses aux fréquences limites en expérimentation . . . . .	122

## LISTE DES TABLEAUX

4.1	Caractéristiques du <i>Mini-Shaker 4810</i> . . . . .	29
4.2	Caractéristiques du <i>LDS V203</i> . . . . .	29
4.3	Caractéristiques du <i>Vibration Exciter - type 4809</i> . . . . .	30
4.4	Masses utilisées : pot vibrant #1 . . . . .	33
4.5	Fréquences utilisées : pot vibrant #1 . . . . .	34
4.6	Masses utilisées : pot vibrant #2 . . . . .	38
4.7	Fréquences utilisées : pot vibrant #2 . . . . .	38
4.8	Masses utilisées : pot vibrant #3 . . . . .	42
5.1	Fréquences limites des contrôleurs en simulation . . . . .	77
5.2	Intervalles de masses obtenus par les applications gardiennes . . . . .	79
6.1	Caractéristiques de la carte d'acquisition PCI-6221 (37 broches) . . . . .	87
6.2	Correspondance entre le connecteur et la carte d'acquisition . . . . .	90
6.3	Fréquences limites obtenues en expérimentation . . . . .	93
B.1	Résultats de l'identification du paramètre $a_{11}$ . . . . .	109
B.2	Résultats de l'identification du paramètre $b_{12}$ . . . . .	109
B.3	Résultats de l'identification du paramètre $b_{13}$ . . . . .	110
B.4	Résultats de l'identification du paramètre $a_{21}$ . . . . .	110
B.5	Résultats de l'identification du paramètre $b_{22}$ . . . . .	110
B.6	Résultats de l'identification du paramètre $b_{23}$ . . . . .	111
B.7	Résultats de l'identification du paramètre $a_{31}$ . . . . .	111
B.8	Résultats de l'identification du paramètre $a_{32}$ . . . . .	111
B.9	Résultats de l'identification du paramètre $b_{32}$ . . . . .	111
B.10	Résultats de l'identification du paramètre $b_{33}$ . . . . .	112
B.11	Résultats de l'identification du paramètre $b_{34}$ . . . . .	112
B.12	Résultats de l'identification du paramètre $b_{35}$ . . . . .	112
B.13	Mesures de la réponse fréquentielle du pot vibrant #3 – Masse $M_2$ . . . . .	113

## LISTE DES FIGURES

2.1	Le rhéomètre . . . . .	5
2.2	Schéma général du banc de test . . . . .	6
2.3	Formes d'échantillons et de porte-échantillons . . . . .	6
2.4	Signal <i>Transient</i> . . . . .	7
2.5	Signal <i>Blackman</i> . . . . .	8
2.6	Signal <i>Multi-Blackman</i> . . . . .	9
2.7	Réponses du système en boucle ouverte pour différentes entrées . . . . .	10
3.1	Schéma simplifié d'un pot vibrant électrodynamique . . . . .	12
3.2	Modèle général du pot vibrant électrodynamique . . . . .	12
3.3	Modèle simplifié du pot vibrant . . . . .	13
3.4	Modèle le plus simple du pot vibrant . . . . .	14
4.1	Diagramme fonctionnel d'un système monovariable . . . . .	18
4.2	Schéma pour le calcul d'un modèle paramétrique . . . . .	19
4.3	Diagramme de la méthode basée sur l'erreur de prédiction . . . . .	22
4.4	Structure générale pour l'identification . . . . .	22
4.5	Diagramme fonctionnel pour le calcul de l'erreur de prédiction du mo- dèle général . . . . .	25
4.6	Exemple de choix de signaux pour l'identification . . . . .	26
4.7	Le pot vibrant#1 : <i>Mini-Shaker 4810</i> . . . . .	29
4.8	Le pot vibrant#2 : <i>LDS V203</i> . . . . .	29
4.9	Le pot vibrant#3 : <i>Vibration Exciter - type 4809</i> . . . . .	30
4.10	Modèles mécanique et électrique du pot vibrant . . . . .	31
4.11	Modèle dynamique du pot vibrant à 1 degré de liberté . . . . .	32
4.12	Pot vibrant #1 : exemple de lissage des données . . . . .	34
4.13	Résultats d'identification du paramètre $a_{11}$ . . . . .	36
4.14	Résultats d'identification du paramètre $b_{12}$ . . . . .	36
4.15	Résultats d'identification du paramètre $b_{13}$ . . . . .	36
4.16	Validation du modèle du pot vibrant #1 pour $M_4$ à la fréquence $f_2$ . . . . .	37
4.17	Validation du modèle du pot vibrant #1 pour $M_4$ à la fréquence $f_4$ . . . . .	37
4.18	Erreurs de prédiction relatives à la masse $M_1$ . . . . .	37
4.19	Pot vibrant #2 : exemple de lissage des données . . . . .	39
4.20	Résultats d'identification du paramètre $a_{21}$ . . . . .	40
4.21	Résultats d'identification du paramètre $b_{22}$ . . . . .	40

4.22	Résultats d'identification du paramètre $b_{23}$ . . . . .	40
4.23	Pot vibrant #3 : déplacement de la masse $M_2$ . . . . .	42
4.24	Paramètres identifiés du numérateur de $G_3$ . . . . .	44
4.25	Paramètres identifiés du dénominateur de $G_3$ . . . . .	45
4.26	Validation du modèle $G_3$ pour la masse $M_1$ . . . . .	47
4.27	Validation du modèle $G_3$ pour la masse $M_4$ . . . . .	48
4.28	Validation du modèle $G_3$ par la réponse fréquentielle – Masse $M_2$ . . .	48
5.1	Problème $\mathcal{H}_\infty$ standard . . . . .	51
5.2	Schéma de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	53
5.3	Schéma de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée . . . . .	55
5.4	Exemples d'applications gardiennes usuelles . . . . .	57
5.5	Exemple de domaine $\Omega$ à garder . . . . .	57
5.6	Exemple de résultats des applications gardiennes . . . . .	60
5.7	Schéma standard pour la $\mu$ -analyse . . . . .	60
5.8	Schéma <b>Simulink</b> <sup>®</sup> de l'exemple 5.4 . . . . .	63
5.9	Résultat de l'exemple 5.4 . . . . .	63
5.10	Caractéristiques en boucle ouverte du pot vibrant #1 . . . . .	64
5.11	Zone de placement des pôles . . . . .	65
5.12	contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #3 . . . . .	66
5.13	Contrôleur à retard de phase – Entrée <i>Transient</i> – $f = 10$ Hz – pot vibrant #1 . . . . .	67
5.14	Fonctions de pondération – Pot vibrant #1 . . . . .	68
5.15	Validation des gabarits fréquents choisis – Pot vibrant #1 . . . . .	69
5.16	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ – Entrée <i>Transient</i> – $f = 10$ Hz – Pot vibrant #1 . . .	70
5.17	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structuré – Entrée <i>Transient</i> – $f = 10$ Hz – Pot vibrant #1	70
5.18	Caractéristiques en boucle ouverte du pot vibrant #3 . . . . .	71
5.19	contrôleur à retard de phase – Entrée <i>Transient</i> – $f = 10$ Hz – Pot vibrant #3 . . . . .	72
5.20	Fonctions de pondération – pot vibrant #3 . . . . .	73
5.21	Validation des gabarits fréquents choisis – Pot vibrant #3 . . . . .	74
5.22	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ – Entrée <i>Transient</i> – $f = 10$ Hz – Pot vibrant #3 . . .	75
5.23	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structuré – Entrée <i>Transient</i> – $f = 10$ Hz – Pot vibrant #3	75
5.24	Fréquences limites en simulation – Pot vibrant #1 . . . . .	77
5.25	Fréquences limites en simulation – Pot vibrant #3 . . . . .	77
5.26	Évolution des pôles en boucle fermée en fonction de la masse – Pot vibrant #1 . . . . .	80

5.27	Évolution des pôles en boucle fermée en fonction de la masse – Pot vibrant #3 . . . . .	81
5.28	Performances des lois de commande – Pot vibrant #1 . . . . .	83
5.29	Performances des lois de commande – Pot vibrant #3 . . . . .	84
5.30	Réponse du système vs sinusoïde – Pot vibrant #3 . . . . .	85
6.1	Système de contrôle . . . . .	87
6.2	Carte d’acquisition PCI-6221 (37 broches) . . . . .	88
6.3	Câble et bloc de connexion . . . . .	88
6.4	Comparaison des modes <i>Single Ended</i> et <i>Differential</i> . . . . .	89
6.5	Schéma général des éléments de contrôle . . . . .	90
6.6	Schéma de contrôle Simulink® . . . . .	94
6.7	Contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #3 . . . . .	95
6.8	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ – Pot vibrant #3 . . . . .	96
6.9	Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structuré – Pot vibrant #3 . . . . .	97
6.10	Fréquences limites en expérimentation – Pot vibrant #3 . . . . .	98
A.1	Fenêtre de <i>Blackman</i> pour 50 points . . . . .	107
A.2	Entrée <i>Blackman</i> avec un seul cycle . . . . .	107
A.3	Entrée <i>Blackman</i> à 10 cycles . . . . .	108
C.1	Limites du contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #1 . . . . .	116
C.2	Limites du contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ – Pot vibrant #1 . . . . .	117
C.3	Limites du contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structuré – Pot vibrant #1 . . . . .	118
C.4	Limites du contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #3 . . . . .	119
C.5	Limites du contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ – Pot vibrant #3 . . . . .	120
C.6	Limites du contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structuré – Pot vibrant #3 . . . . .	121
D.1	Limites expérimentales du contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #3	123
D.2	Limites expérimentales du contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ – Pot vibrant #3 . . . . .	124
D.3	Limites expérimentales du contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structurées – Pot vibrant #3	125

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	. . . . .	107
Annexe B	Résultats numériques d'identification . . . . .	109
Annexe C	Listes des figures des réponses aux fréquences limites en simulation . .	115
Annexe D	. . . . .	122

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

ARMAX	Auto Regressive Moving Average with eXogenous input
ARX	Auto Regressive with eXogenous input
BJ	Box-Jenkins
LFT	Linear Fractional Transformation
OE	Output Error
PSD	Power Spectral Density
RTW	Real Time Workshop
VCS	Vibration Control System



# CHAPITRE 1

## Introduction

### 1.1 Mise en contexte

La connaissance des propriétés mécaniques des matériaux est un élément essentiel dans le développement de produits fiables et performants. Dans certaines applications, on cherche plus particulièrement à connaître les propriétés viscoélastiques de matériaux mous et de tissus biologiques qui sont définies par l'élasticité et la viscosité du matériau étudié. Divers domaines utilisent ces données ; notamment le secteur biomédical, où elles sont utilisées pour le diagnostic et le suivi de certaines pathologies et dans la reconstruction de certains tissus biologiques <sup>1</sup>.

Afin d'extraire les propriétés viscoélastiques du matériau, on utilise un instrument de mesure appelé rhéomètre ou analyseur mécanique dynamique. Il est composé d'un capteur de déplacement ou d'un accéléromètre et d'une source de vibration sur laquelle est vissé un échantillon du matériau. On applique le profil de déplacement désiré à l'aide de la source vibrante et on extrait ensuite les propriétés viscoélastiques grâce au spectre fréquentiel du déplacement de l'échantillon résultant.

La dynamique de la source vibrante peut cependant empêcher la reproduction exacte du déplacement désiré, et par conséquent, le matériau n'est pas soumis au profil de vibration désiré. De ce fait, il est nécessaire d'asservir la source vibrante afin qu'elle suive exactement le profil de référence peu importe la masse de l'échantillon. Cet objectif est au cœur de ce projet de maîtrise et c'est ce que nous allons présenter tout au long de ce mémoire.

Ce projet de recherche est une collaboration entre Polytechnique Montréal et une entreprise locale spécialisée dans la conception et le développement de rhéomètres qui a été mené dans le cadre d'une subvention CRSNG. Ces instruments utilisent des pots vibrants électrodynamiques comme source de vibration, ce qui affecte le déplacement de l'échantillon étudié. Nous avons donc été mandatés pour concevoir des stratégies de contrôle qui garantissent un déplacement des pots vibrants identique au profil de déplacement désiré.

La particularité de ce projet réside dans le fait que les signaux de vibration de référence

---

1. Un exemple est la reconstruction des cordes vocales dans (Jiao *et al.*, 2009).

sont inusités. On désire poursuivre trois types de signaux pour lesquelles la fréquence et l'amplitude sont ajustées en fonction du matériau étudié. De plus, les signaux appliqués sont transitoires et différents des signaux d'entrée communs tels que l'échelon, la rampe, les entrées sinusoïdales, etc.

Une deuxième particularité du sujet réside dans la variation des masses des échantillons d'un test à l'autre selon le matériau étudié. Par conséquent, le contrôleur se doit d'assurer les mêmes performances indépendamment de la masse fixée au pot vibrant. Nous allons par conséquent utiliser les méthodes de la commande robuste telles que la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée, entre autres, pour la conception d'un contrôleur garantissant des performances robustes face aux variations des masses des échantillons.

Avant d'entreprendre la synthèse des contrôleurs, nous devons obtenir les modèles mathématiques des pots vibrants étudiés. Or, les données des fiches techniques des sources vibrantes ne fournissent pas tous les paramètres qui caractérisent les pots vibrants. Pour pallier à ce problème, nous allons procéder à l'identification des modèles de ceux-ci en nous basant sur les mesures expérimentales et les modèles théoriques disponibles en littérature. Ce processus est effectué pour chaque pot vibrant et pour différentes masses. Au terme de l'identification, nous obtenons un modèle qui dépend d'un seul paramètre, i.e la masse de l'échantillon.

Une fois les modèles des pots vibrants identifiés et les lois de commande synthétisées et validées, les correcteurs sont implantés sur le système physique afin de corroborer leurs performances avec celles atteintes en simulation et fixer en conséquence leurs limites réelles.

## 1.2 Objectifs du projet

L'objectif général de ce projet est l'asservissement en position de pots vibrants électrodynamiques. La loi de commande recherchée doit assurer la poursuite de trois types de signaux en régime transitoire et ce pour différentes masses d'échantillons. Des sous-objectifs découlent du but général du projet et vont nous permettre d'élaborer et d'implanter les stratégies de contrôle.

En premier lieu, les pots vibrants doivent être modélisés en fonction de la masse des échantillons à l'aide du processus d'identification et les modèles théoriques décrits en littérature.

En deuxième lieu, en se basant sur les modèles développés, on synthétise les lois de com-

mande qui assurent la poursuite du signal de référence. Cette étape est divisée en deux parties : on essaie d’abord de concevoir un contrôleur par les méthodes classiques et on vérifie ses limites. Ensuite, on développe des contrôleurs plus évolués basés sur la théorie de la commande robuste.

En dernier lieu, on choisit les composantes nécessaires pour monter le banc de tests afin d’implanter toutes les stratégies de contrôle sur le système physique. On vérifie ensuite les performances réelles de chacune des lois de commande, en les comparant à celles obtenues en simulation.

### 1.3 Plan du mémoire

Ce mémoire est composé de 7 chapitres qui exposent les travaux et les résultats de recherche réalisés tout au long de la maîtrise.

Les objectifs du projet et les méthodes considérées pour les réaliser sont décrites de façon générale dans le **chapitre 1**.

Dans le **chapitre 2**, on décrit les éléments importants relatifs au projet. On commence par une présentation des composants constituant le rhéomètre et le banc de tests. On passe ensuite à la description des trois profils de déplacement que la source vibrante doit poursuivre. Enfin, on termine en illustrant la problématique rencontrée par un exemple de la réponse des pots vibrants pour les trois types de vibration.

Le **chapitre 3** fait l’état de l’art, dans un premier temps, des modèles mathématiques des pots vibrants développés. Pour ce faire, on y présente les schémas, les hypothèses et les équations utilisés pour aboutir à chacun des modèles. Dans un deuxième temps, les articles traitant des stratégies de contrôle et d’asservissement des pots vibrants électrodynamiques sont décrits. Ces descriptions mettent en évidence les limitations des stratégies de contrôle existantes par rapport à ce projet de recherche et justifient l’élaboration de nouvelles méthodes de contrôle des pots vibrants.

On passe ensuite, dans le **chapitre 4**, à la présentation théorique du processus d’identification et la démarche entreprise pour identifier les paramètres des modèles des trois pots vibrants. Pour chaque modèle, l’évolution des paramètres identifiés en fonction de la masse des porte-échantillons est tracée et le modèle est ensuite validé sur de nouvelles données ex-

périmentales.

Dans le **chapitre 5**, on développe trois stratégies de contrôle pour deux pots vibrants. La première stratégie consiste à synthétiser un contrôleur basé sur une loi de commande classique. La deuxième et troisième stratégies d’asservissement utilisent, quant à elles, la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée. Ce sont deux méthodes qui conduisent à un contrôleur robuste face aux changements de masses dans les modèles identifiés. Ensuite, pour chaque stratégie de contrôle, on présente les résultats et les limitations obtenus en simulation. Enfin, on termine par une étude des performances robustes de chacune des lois de commande à l’aide des applications gardiennes et de la  $\mu$ -analyse.

Le **chapitre 6** est dédié aux résultats expérimentaux qui résultent de l’implantation pratique des contrôleurs pour le troisième pot vibrant<sup>2</sup>. Dans un premier lieu, on y présente le matériel choisi pour l’implantation du contrôleur. Dans un second lieu, on y décrit les résultats et les limitations des trois lois de commande implantées. En dernier lieu, une comparaison des performances obtenues en simulation et en pratique des trois stratégies de contrôle est présentée en fin de ce chapitre.

Le **chapitre 7** dresse un sommaire des résultats pertinents obtenus dans le projet. On y présente aussi de nouvelles voies de recherche à explorer pour améliorer les solutions trouvées auparavant au niveau des stratégies de contrôle et de leur implantation.

---

2. Le pot vibrant #3 est le seul disponible pour tester les lois de commande en expérimentation.

## CHAPITRE 2

### Éléments du banc de test

Nous décrivons dans ce chapitre les éléments importants du banc de test. Tout d'abord, on commence par une présentation des composantes du rhéomètre et du banc de test. Ensuite, on décrit les trois signaux de référence appliqués aux pots vibrants. Enfin, on termine par un exemple de la réponse du système pour les trois profils de déplacement afin d'illustrer la problématique.

#### 2.1 Le rhéomètre

L'instrument de mesure étudié est illustré à la figure 2.1 :



Figure 2.1 Le rhéomètre

Il est constitué essentiellement :

1. d'un capteur optique de déplacement ;
2. d'un porte-échantillon où est confiné le matériau étudié<sup>1</sup> ;
3. d'un pot vibrant, d'une carte d'acquisition des données et ;
4. d'une interface utilisateur développée par l'entreprise pour le traitement des données.

---

1. Le poids de l'échantillon est négligeable par rapport au poids du porte-échantillon.

## 2.2 Banc de test

Le schéma général du banc de test est présenté à la figure 2.2. Il est composé :

- d'un **ordinateur** qui permet la génération des signaux de commande ainsi que le traitement des données récoltées ;
- d'une **interface graphique** qui affiche le signal de commande, la réponse temporelle et le contenu fréquentiel du déplacement mesuré ;
- d'un **capteur de déplacement laser** qui convertit le déplacement de l'échantillon en tension et le transmet à la carte d'acquisition ;
- d'un **amplificateur audio** qui amplifie le signal de commande pour faire vibrer la table du pot vibrant et ;
- d'un **pot vibrant** qui traduit le signal de commande à la sortie de l'amplificateur en déplacement afin de faire vibrer le matériau confiné à l'intérieur du porte-échantillon.

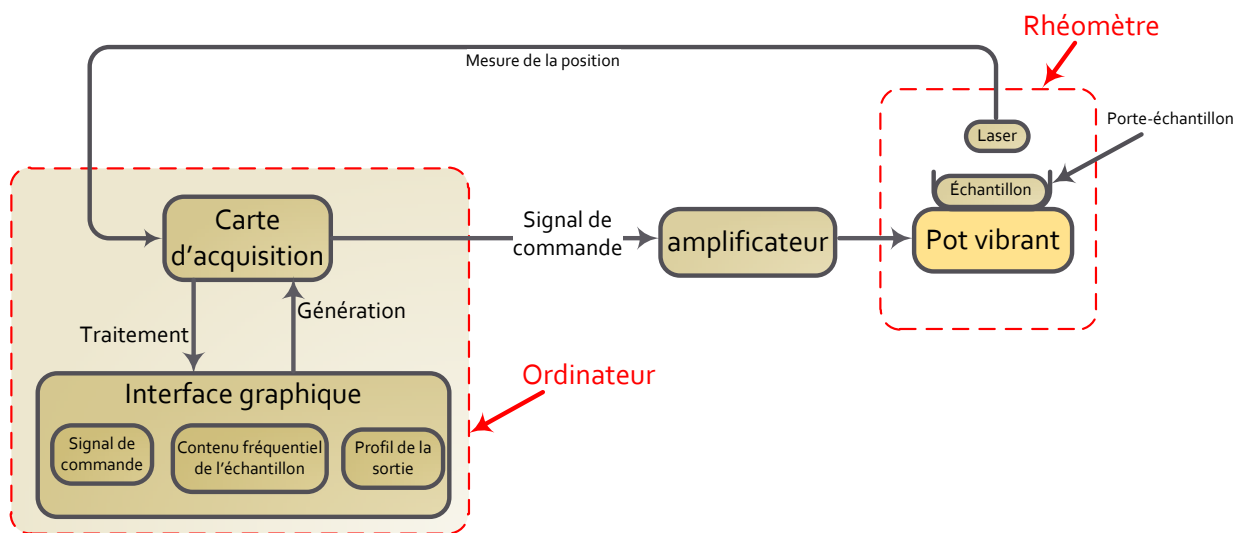


Figure 2.2 Schéma général du banc de test

Pour caractériser un matériau, on dispose d'échantillons de formes et de tailles différentes et de porte-échantillons correspondants, selon la structure et le domaine d'application du matériau étudié (figure 2.3).

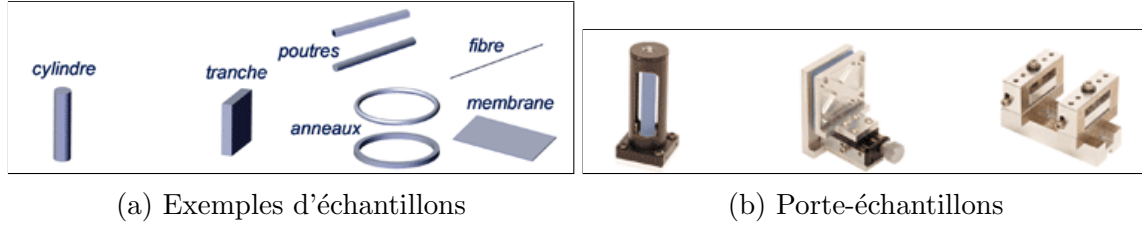


Figure 2.3 Formes d'échantillons et porte-échantillons

## 2.3 Signaux de référence

Dans ce projet, on utilise trois types de vibrations pour lesquelles la fréquence et l'amplitude sont ajustées selon le type de l'échantillon étudié :

- entrée *Transient* ;
- entrée *Blackman* ;
- entrée *Multi-Blackman*.

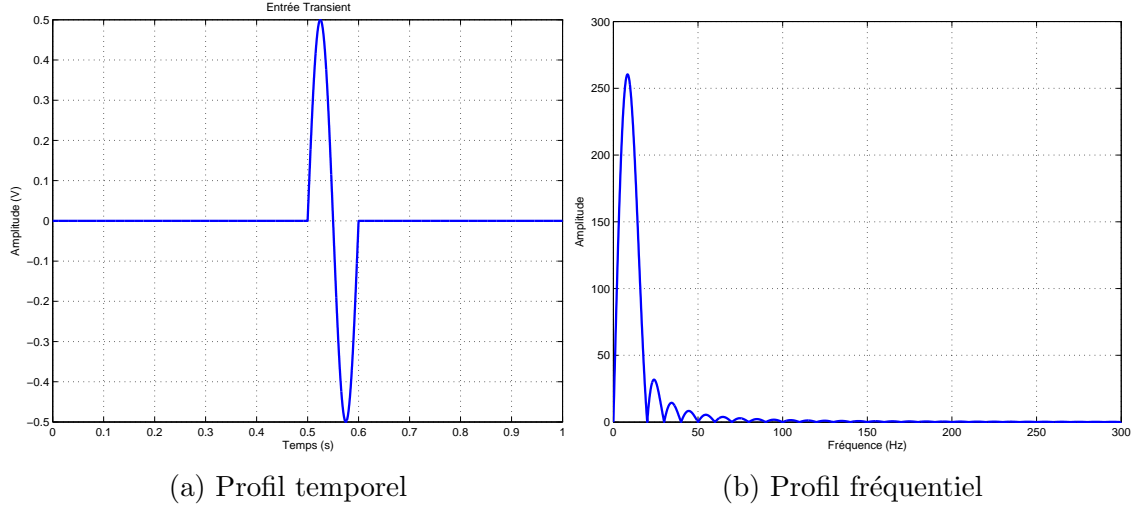
Ces signaux permettent d'appliquer une vibration très rapide et brusque pour ensuite étudier sa propagation dans l'échantillon testé. Elle est utilisée principalement en imagerie médicale sous le nom d'élastographie par signaux transitoires<sup>2</sup> (Parker *et al.*, 2012, §4.6)

### ◆ Entrée *Transient*

Ce premier type de signal est sous la forme d'une seule période d'un signal sinusoïdal (figure 2.4a). L'énergie de la vibration est concentrée autour d'une seule fréquence comme le montre la figure 2.4b.

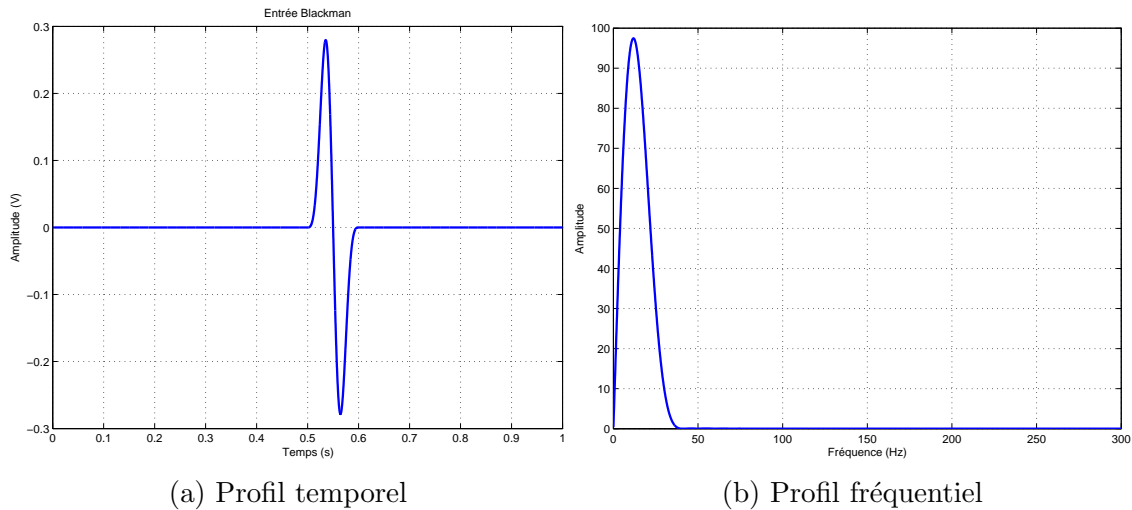
---

2. *Transient Shear Wave Imaging*

Figure 2.4 Signal *Transient*

### ◆ Entrée *Blackman*

Ce deuxième signal est le signal *Transient* multiplié par une fenêtre *Blackman*<sup>3</sup> (figure 2.5a). Cette procédure permet de diminuer l'amplitude des lobes secondaires vers zéro dans l'analyse fréquentielle du signal appliqué comme le montre la figure 2.5b. On remarque également que le lobe principal est plus large à la fréquence centrale (Oppenheim *et al.*, 1999, §7.2), (Ambardar, 2007, §10.3).

Figure 2.5 Signal *Blackman*


---

3. Voir annexe A.



### ◆ Entrée *Multi-Blackman*

Le dernier profil de déplacement est un signal sinusoïdal de plusieurs périodes multiplié par une fenêtre *Blackman* (figure 2.6a). Le nombre de périodes ou cycles des sinusoïdes est choisi par l'utilisateur. On remarque que ce type d'entrée permet de concentrer encore plus l'énergie à la fréquence désirée comme l'illustre la figure 2.6b.

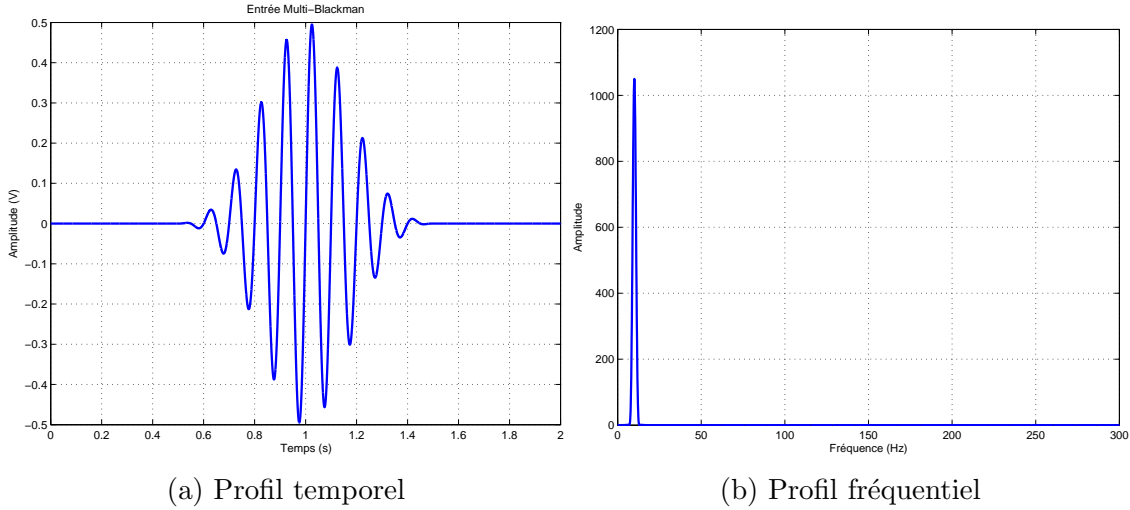


Figure 2.6 Signal *Multi-Blackman*

L'annexe A décrit la façon de générer la fenêtre *Blackman* et illustre graphiquement la façon d'obtenir les signaux des figures 2.5a et 2.6a.

## 2.4 Illustration de la réponse du système

Les déplacements du pot vibrant sont clairement différents des signaux de références au niveau de la fréquence et de l'amplitude comme le montre la figure 2.7. On remarque à travers cet exemple la nécessité d'implanter une stratégie de contrôle qui permette de suivre le déplacement désiré.

Les tests montrent également que l'allure du déplacement se dégrade considérablement lorsque la fréquence d'entrée et/ou la masse de l'échantillon augmentent.

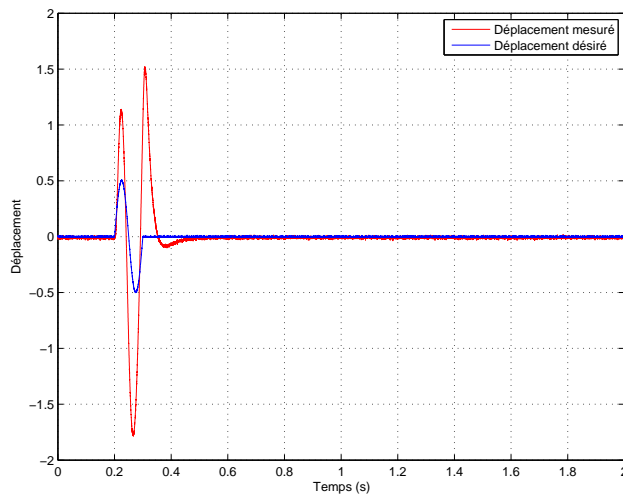
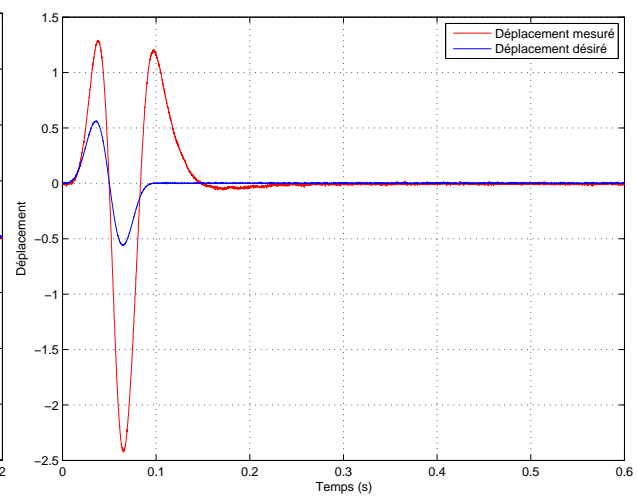
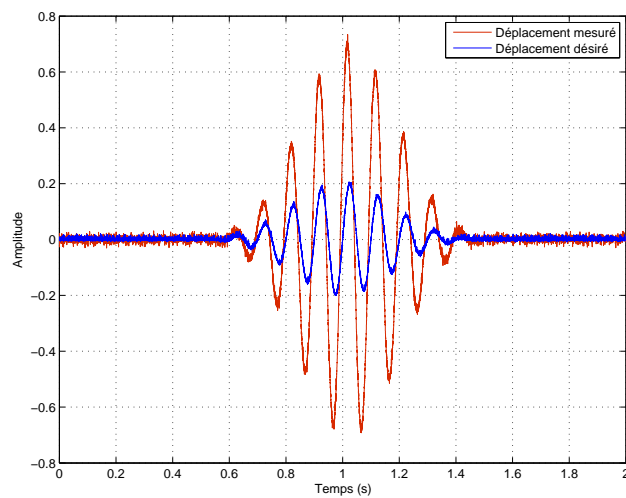
(a) Entrée *Transient*(b) Entrée *Blackman*(c) Entrée *Multi-Blackman*

Figure 2.7 Réponses du système en boucle ouverte pour différentes entrées

## CHAPITRE 3

### Revue de littérature

La première section de ce chapitre présente les hypothèses et les équations développées pour modéliser les pots vibrants électrodynamiques. Dans la deuxième section, on passe en revue les articles qui traitent du contrôle des pots vibrants.

### 3.1 Modélisation des pots vibrants

#### 3.1.1 Fonctionnement

La caractérisation des matériaux nécessite la vibration de l'échantillon selon des profils de déplacements spécifiques. De ce fait, nous utilisons des pots vibrants qui sont choisis selon le niveau de force de vibrations à générer, la puissance nécessaire pour faire vibrer la structure et le niveau de déplacement à atteindre. On dénombre trois familles de pots vibrants :

1. hydrauliques ;
2. inertiels et ;
3. électrodynamiques.

Dans ce projet, nous utilisons uniquement le troisième type de pots vibrants, appelé aussi pot vibrant électromagnétique<sup>1</sup>. Il offre une grande flexibilité dans la reproduction de différents signaux complexes et une large bande de fréquences. Les tests en accélération sont possibles aux hautes fréquences tandis que les tests de déplacement sont réalisés à basses et moyennes fréquences seulement. Enfin, il est utilisé pour la caractérisation des petits échantillons ayant des masses relativement faibles (Silva, 2007, chap. 8).

La figure 3.1 illustre le schéma simplifié d'un pot vibrant électrodynamique. Le mouvement de la table du pot vibrant est dû au courant traversant la bobine. La tête est montée sur un support flexible et peut être orientée selon différents angles dépendamment de l'application désirée. Dans notre cas, les tests génèrent des déplacements selon l'axe vertical.

---

1. Les détails du fonctionnement et des applications des deux premiers types sont présentés dans (Silva, 2007, chap. 8).

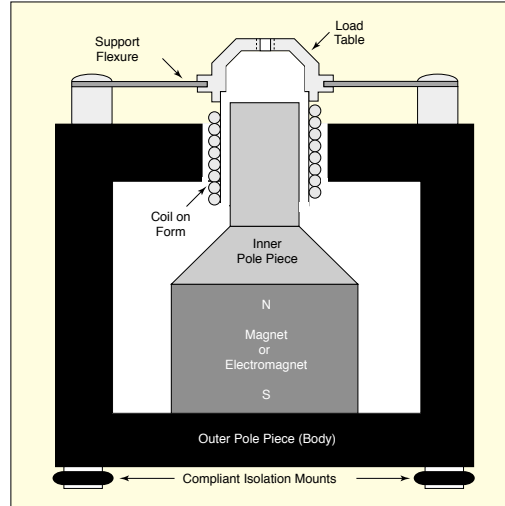


Figure 3.1 Schéma simplifié d'un pot vibrant électrodynamique, tiré de (Lang et Snyder, 2001)

### 3.1.2 Modélisation des pots vibrants électrodynamiques

Le pot vibrant électrodynamique peut être modélisé de différentes façons. Le modèle général trouvé en littérature est celui de la figure 3.2 (Lang et Snyder, 2001). Il est composé d'une partie mécanique et d'une partie électrique. La partie mécanique décrit les relations entre la structure externe, le bobinage et l'agencement des masses de la table vibrante avec l'échantillon. Les liens entre ces trois éléments sont modélisés par des couples ressort-amortisseur. Le modèle électrique, quant à lui, décrit la relation entre la tension et la force générée pour déplacer le système. Les déplacements de chacune des masses en fonction de l'entrée appliquée sont déduits des équations du mouvement<sup>2</sup>.

Un simulateur de vibration a été développé par (Ricci *et al.*, 2009) basé sur ce modèle pour la génération de *vibrations virtuelles* afin d'améliorer les performances des tests de vibration.

---

2. La description de chacun des blocs du modèle général est détaillée à la section 4.5.1.

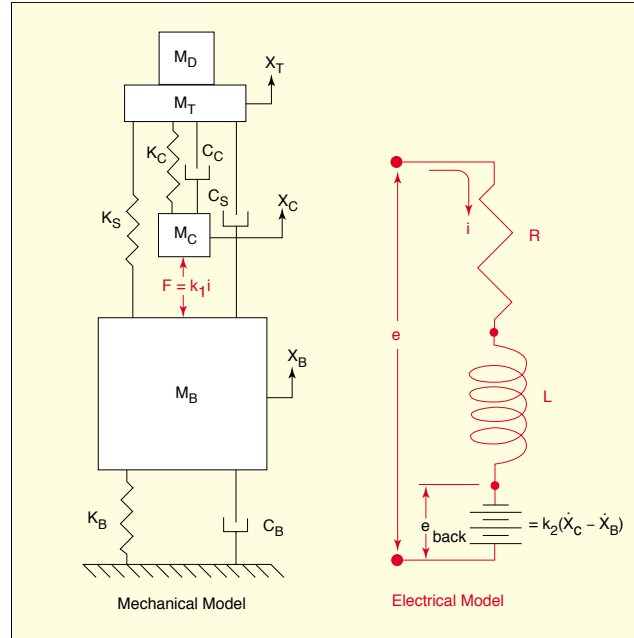


Figure 3.2 Modèle général du pot vibrant électrodynamique, tiré de (Lang et Snyder, 2001)

Des modèles plus simples sont obtenus en négligeant, par exemple, les liens entre la structure externe du pot vibrant et le sol. On peut également négliger la constante de temps électrique devant la constante de temps mécanique.

Le modèle simplifié proposé dans (Silva, 2007, §8.2.2) considère un lien rigide entre la structure du pot vibrant et le sol et garde uniquement les liens entre la tête du pot vibrant et le bobinage tel que présenté à la figure 3.3.

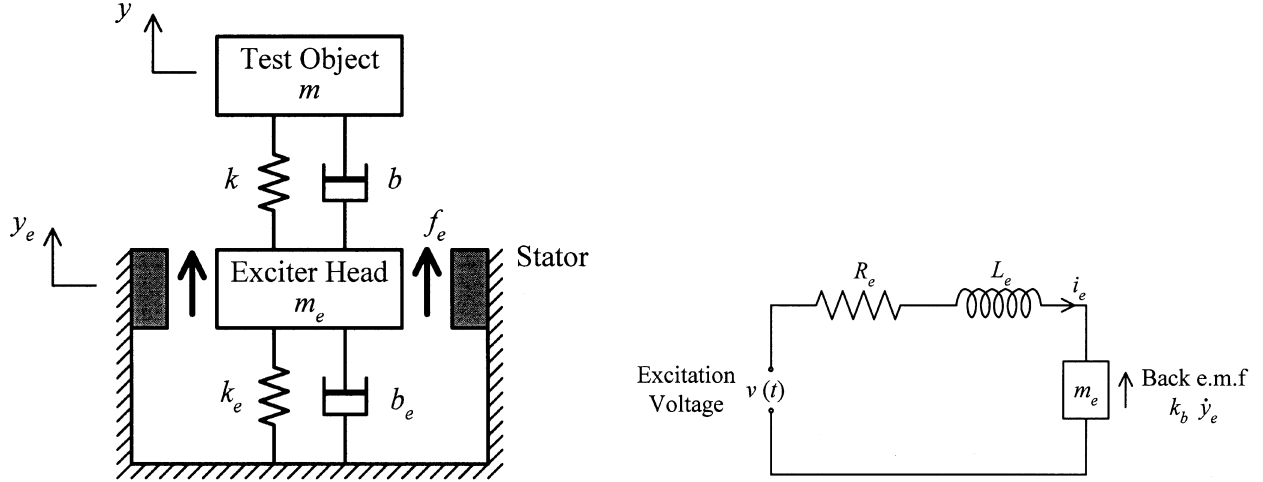


Figure 3.3 Modèle simplifié du pot vibrant, tiré de (Silva, 2007)

Le système d'équations obtenu à partir de ce schéma est le suivant (Silva, 2007, p. 455) :

$$\begin{aligned}
 \text{Échantillon : } & m\ddot{y} = -k(y - y_e) - b(\dot{y} - \dot{y}_e) \\
 \text{Tête du pot vibrant : } & m_e\ddot{y}_e = f_e + k(y - y_e) + b(\dot{y} - \dot{y}_e) - k_e y_e - b_e \dot{y}_e \\
 \text{Partie électrique : } & v(t) = L_e \frac{di_e}{dt} + R_e i_e + k_b \dot{y}_e
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Après quelques calculs directs, la fonction de transfert reliant le déplacement  $y_e$  à la tension d'entrée  $v$  est alors donnée par l'équation suivante :

$$\frac{y_e}{v} = \frac{k_b(m s^2 + b s + k)}{R_e(m \cdot m_e s^4 + [m(b_e + b) + m_e b] s^3 + [m(k_e + k) + m_e k + b b_e] s^2 + [b k_e + b_e k] s + k k_e)} \tag{3.2}$$

Naturellement, on a besoin des valeurs des paramètres du pot vibrant afin d'utiliser ce modèle mathématique, chose que les fabricants n'indiquent pas en général sur la fiche technique fournie.

Un modèle encore plus simple est celui d'un système masse-ressort-amortisseur (Behrens *et al.*, 2003, partie 1). On néglige dans ce cas la constante électrique devant la constante mécanique du système. De plus, tous les liens sont rigides, mis à part celui qui supporte la table du pot vibrant que l'on considère flexible (voir figure 3.4).

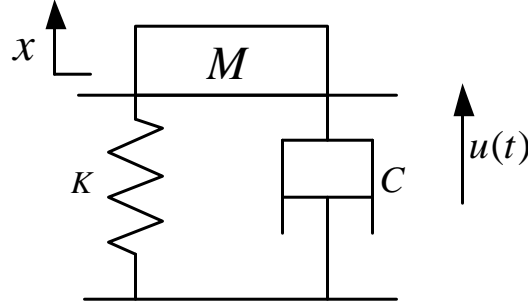


Figure 3.4 Modèle le plus simple du pot vibrant

La fonction de transfert reliant le déplacement  $x$  à la tension d'entrée  $u$  est alors donnée par :

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K} \quad (3.3)$$

D'autres études se sont intéressées à l'analyse de la relation entre le porte-échantillon et la table du pot vibrant pour modéliser et expliquer au mieux certains phénomènes de résonance (Varoto et de Oliveira, 2002; Lang, 1997). Toutefois, dans notre application, le porte-échantillon est vissé sur la table et ne devrait pas affecter les résultats finaux dans le cadre de ce projet.

### 3.2 Stratégies de contrôle des pots vibrants

Il existe en industrie différentes compagnies spécialisées dans la conception de contrôleurs pour les pots vibrants. (Zhuge *et al.*, 2010) présente l'évolution des systèmes de contrôle de vibrations (VCS<sup>3</sup>) durant les 40 dernières années et décrit les premières méthodes utilisées dans ce domaine.

En plus des VCS industriels, plusieurs chercheurs se sont intéressés au développement de nouvelles stratégies de contrôle qui sont basées sur différents modèles de pots vibrants selon les capteurs disponibles.

Un système de contrôle basé sur le placement de pôles a été développé par (Macdonald *et al.*, 1993) afin de réduire l'effet de la résonance de l'armature du pot vibrant lorsqu'une entrée sinusoïdale est appliquée. La seule mesure disponible est l'accélération de la table du

---

3. *Vibration Control System.*

pot vibrant et le modèle utilisé est un modèle d'ordre 2. Les résultats de simulation sont jugés satisfaisants et le contrôleur est implanté sur un analyseur de signaux numériques. Cette stratégie de contrôle réduit la sensibilité du système face au contenu harmonique de la source qui cause le mode résonant. Il n'arrive cependant pas à éliminer l'effet des non linéarités négligées dans le modèle qui provoquent des harmoniques dans la réponse du système aux moyennes fréquences.

Dans (Gomes *et al.*, 2008), une approche par la densité spectrale de puissance d'accélération (PSD<sup>4</sup>) est utilisée pour le contrôle de pots vibrants électrodynamiques. Le signal d'accélération du pot vibrant est mesuré afin de calculer sa PSD. Ces deux mesures sont ensuite comparées à l'accélération et à la PSD de référence afin d'ajuster la tension envoyée au pot vibrant. Par cette méthode, nous n'avons pas besoin de connaître les paramètres physiques du système. Toutefois, les performances de cette méthode n'ont pas été testées aux basses fréquences ou lorsque le capteur utilisé est celui du déplacement.

(Della Flora et Gründling, 2008) présente une autre stratégie afin de poursuivre un signal sinusoïdal et, ce, en se basant aussi sur la mesure de l'accélération. Le modèle utilisé est celui présenté dans l'article (Lang et Snyder, 2001). Trois contrôleurs numériques sont mis en cascade ; deux pour éliminer le mode résonant de la bobine et de la suspension du pot vibrant, et un troisième pour assurer la poursuite du signal de référence sinusoïdal. Le contrôleur est implanté sur un processeur de signal numérique et assure la poursuite de la consigne pour une fréquence fixe mais il reste encore sensible aux résonances lorsque le matériau étudié n'est pas assez rigide.

La loi de commande proposée par (Rana, 2011) est basée elle sur un contrôleur à logique floue afin d'assurer la poursuite d'un signal sinusoïdal. L'idée générale de l'algorithme est la minimisation de l'erreur entre la mesure et la consigne ainsi que sa variation entre deux périodes d'échantillonnage. Le contrôleur est ensuite implanté sur une plate-forme dédiée au contrôle en temps réel et assure de bonnes performances lorsque la table du pot vibrant est vide ou lorsqu'elle contient un élément rigide. Cependant, le système n'assure pas de bons résultats lorsque l'échantillon est un matériau mou comme par exemple la silicone.

La commande robuste est utilisée pour le contrôle des pots vibrants électrodynamiques en se basant sur la mesure de l'accélération et du déplacement dans (Uchiyama et Fujita, 2006). Deux contrôleurs sont alors synthétisés ; un premier, pour la boucle interne, qui utilise

---

4. *Acceleration Power Spectral Density*



la mesure du déplacement pour de faibles fréquences et un deuxième, pour la boucle externe, qui utilise la mesure de l'accélération pour les variations les plus rapides. L'implantation de la loi de commande a permis la poursuite des signaux désirés. Enfin, la comparaison de cette nouvelle stratégie de contrôle avec celle utilisant uniquement la mesure de l'accélération démontre une amélioration d'environ 10% au niveau de l'erreur quadratique moyenne entre le signal de référence et la consigne.

Il existe d'autres types de pots vibrants qui se déplacent selon trois axes<sup>5</sup>. Un compensateur robuste basé sur la  $\mu$ -synthèse est développé afin d'améliorer la réponse transitoire du système (Uchiyama et Fujita, 2003). Les tests expérimentaux ont montré que certaines performances n'ont pas été satisfaites à cause de la nature du matériau étudié. Pour remédier à cela, un filtre adaptatif est ajouté au contrôleur initial, ce qui a amélioré les résultats expérimentaux par la suite.

Enfin, les articles (Uchiyama et Fujita, 2009) et (Uchiyama *et al.*, 2009) présentent le développement d'un contrôleur synthétisé à l'aide de la  $\mu$ -synthèse et de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  afin d'éliminer la non-linéarité causée par l'échantillon étudié aux fréquences de 1 Hz à 10 Hz. Toutefois, le contrôleur résultant est plus complexe à implanter comparativement aux contrôleurs précédents et il a été vérifié uniquement à très basses fréquences ( $< 10$  Hz).

### 3.3 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, nous avons décrit, dans un premier lieu, le fonctionnement général des pots vibrants électrodynamiques et leur domaine d'utilisation. Ensuite, nous avons expliqué les modèles utilisés en littérature pour les représenter et les hypothèses adoptées pour réduire leur ordre. Dans un deuxième lieu, nous avons présenté les stratégies de contrôle développées pour asservir les pots vibrants électrodynamiques.

Les principales conclusions que nous retenons de cette revue de littérature et qui démontrent la particularité de ce sujet de recherche sont :

- Premièrement, les paramètres constituant les modèles des pots vibrants ne sont pas tous disponibles, ce qui nous amène à passer par l'identification pour estimer leur valeur.
- Deuxièmement, les articles traitant des contrôleurs robustes des pots vibrants ne tiennent pas compte des variations de masses des échantillons et ne sont pas synthétisés pour la

---

5. *Multi-Axis shaking system*

poursuite de signaux transitoires.

- Troisièmement, la seule mesure disponible dans notre application est celle du déplacement. Or, les contrôleurs présentés sont plus basés sur la mesure de l'accélération à l'exception de (Uchiyama et Fujita, 2006). Il nous faut par conséquent concevoir une nouvelle stratégie de contrôle qui soit capable d'asservir le pot vibrant en se basant uniquement sur la mesure du déplacement.

## CHAPITRE 4

### Identification des paramètres des pots vibrants

Nous présentons dans ce chapitre les modèles des pots vibrants utilisés dans ce projet et qui sont obtenus par identification. On commence par introduire différentes méthodes d'identification. Ensuite, on décrit le fonctionnement et les modèles mathématiques des sources vibrantes. Enfin, on présente l'évolution des paramètres identifiés en fonction de la masse des porte-échantillons ainsi que les modèles finaux retenus. Chaque modèle est validé sur de nouvelles données expérimentales pour différents points d'opération.

#### 4.1 Introduction

Le processus d'identification a pour but de trouver des modèles de systèmes dynamiques à partir de données expérimentales. Le système étudié dans ce document est un système monovarié. Il possède une entrée  $u(t)$ , une sortie  $y(t)$  et des perturbations externes  $v(t)$  tel que montré dans la figure 4.1 :

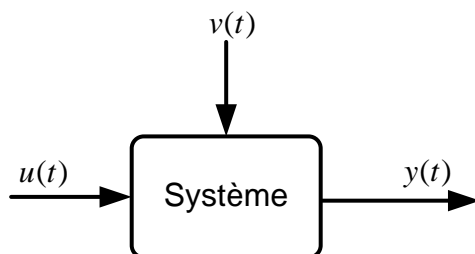


Figure 4.1 Diagramme fonctionnel d'un système monovarié

Afin de modéliser un système, on peut distinguer deux méthodes : l'identification ou la modélisation. Cette dernière consiste à trouver analytiquement les équations dynamiques du système par les lois de la physique, alors que l'identification est un processus basé sur des données expérimentales. Deux types d'identification peuvent être définis :

- **l'identification paramétrique** qui est basée sur la détermination ou l'estimation d'un vecteur de paramètres  $\theta$  à partir des mesures expérimentales d'entrées et de sorties (Ljung, 1999, chap. 7) (Söderström, 1989, chap. 6). C'est cette méthode qui est utilisée dans notre étude et qui est détaillée dans les sections qui suivent.

- le deuxième type est **l'identification non paramétrique** où l'on ne cherche pas à déterminer directement le modèle du système à partir d'un vecteur de paramètres. Cette approche est basée sur les réponses des systèmes obtenues pour des entrées spécifiques comme par exemple une impulsion, un échelon ou une sinusoïde. Les détails relatifs à cette méthode sont présentés dans (Ljung, 1999, chap. 6), et (Söderström, 1989, chap. 3).

### ♦ Les étapes d'identification

Bien qu'il soit difficile de rendre automatique l'identification d'un système, le schéma de la figure 4.2 décrit un processus itératif qui mène à l'élaboration d'un bon modèle paramétrique :

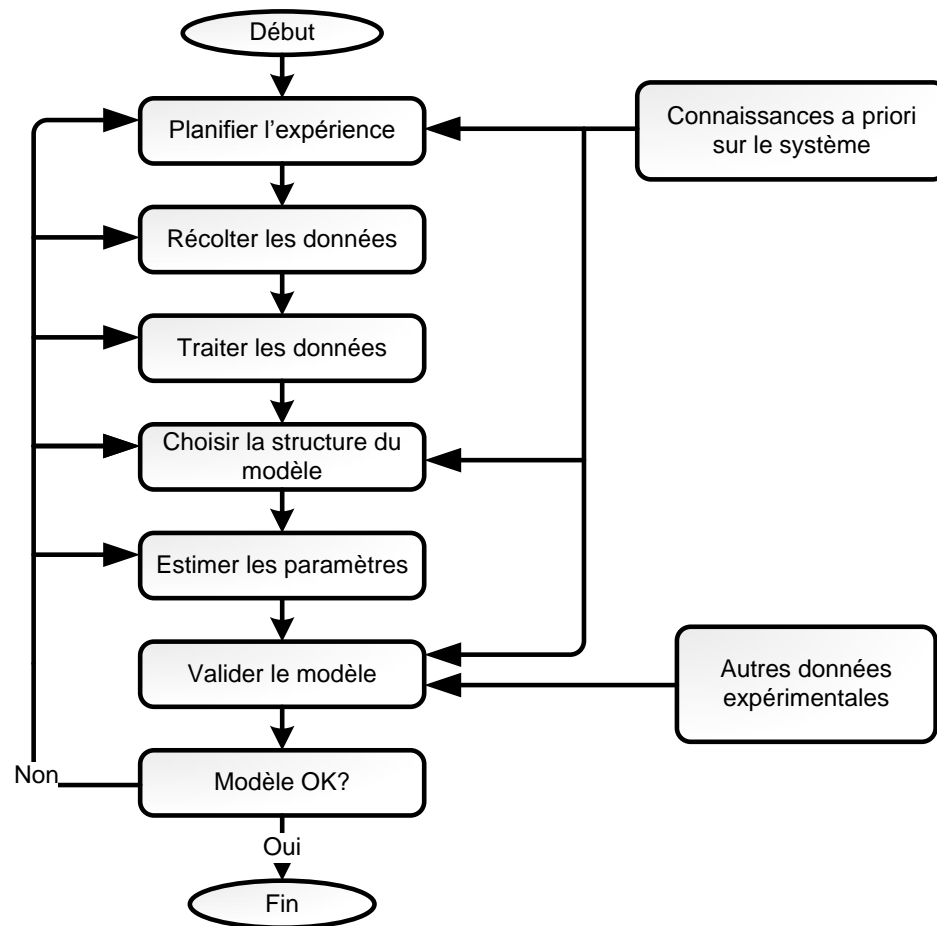


Figure 4.2 Schéma pour le calcul d'un modèle paramétrique

Les étapes importantes de ce schéma sont :

1. **Connaissances *a priori* sur le système** : cette étape regroupe toutes les informations théoriques qui concernent le comportement du système à identifier.
2. **Planification de l'expérience et récolte des données** : l'entrée du système doit être choisie convenablement afin d'enregistrer les données d'entrée et de sortie qui décrivent de la meilleure façon le comportement dynamique du procédé.
3. **Traitement des données** : cette étape permet de s'assurer de la bonne qualité des données récoltées. Par exemple, éliminer les points aberrants, vérifier le rapport signal à bruit, etc.
4. **Choix de la structure du modèle** : les connaissances *a priori* sur le système permettent de choisir une structure du modèle pour ensuite estimer ses paramètres à l'aide des différentes méthodes d'identification.
5. **Validation du modèle** : une fois les paramètres calculés, le modèle résultant est validé à l'aide de nouvelles données expérimentales.  
Si le modèle passe cette étape alors l'identification est terminée, sinon il faut revenir en arrière dans l'algorithme dans l'une des étapes précédentes jusqu'à satisfaction.

## 4.2 Identification paramétrique

### 4.2.1 Régression linéaire

La régression linéaire est le type le plus simple d'un modèle paramétrique. Sa forme générale est :

$$y(t) = \phi^T(t)\theta + e(t) \quad (4.1)$$

où

- $y(t)$  est la sortie enregistrée à l'instant  $t$ .
- $\phi^T(t)$  est le régresseur, un vecteur formé de données enregistrées sur le système.
- $\theta$  est le vecteur des paramètres à estimer.
- $e(t)$  est le bruit de mesure supposé être généralement un bruit blanc centré.

L'objectif de la régression linéaire est d'obtenir le meilleur estimé du vecteur de paramètres  $\theta$  qui sera noté  $\hat{\theta}$ . L'erreur de prédiction associée est alors donnée par :

$$\varepsilon(t) = y(t) - \phi^T(t)\theta \quad (4.2)$$

Souvent, on présente l'équation 4.2 sous forme matricielle suite à une expérience sur le système avec  $N$  données collectées :

$$\varepsilon_N = Y_N - \Phi_N \theta \quad (4.3)$$

où  $\varepsilon_N$  est le vecteur des erreurs de prédiction,  $Y_N$  est le vecteur de sorties mesurées et  $\Phi_N$  la matrice qui regroupe les vecteurs  $\phi$  pour toute l'expérience.

En général, il n'existe pas de solution algébrique pour annuler l'équation 4.3. Une façon de procéder est de trouver  $\hat{\theta}$ , l'estimé de  $\theta$  au sens des moindres carrés, qui minimise la fonction suivante ((Ljung, 1999, §7.3) et (Söderström, 1989, chap. 4)) :

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_N^T \varepsilon_N \\ &= \frac{1}{2} [Y_N - \Phi_N \theta]^T [Y_N - \Phi_N \theta] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pour cela, il faut dériver l'équation 4.4 et l'égaliser à 0 afin de trouver l'estimé  $\hat{\theta}$ .

On trouve donc que :

$$\Phi_N^T \Phi_N \hat{\theta} = \Phi_N^T Y_N \quad (4.5)$$

Ainsi,  $V(\theta)$  a un minimum unique donné par :

$$\hat{\theta} = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T Y_N \quad (4.6)$$

#### 4.2.2 Identification basée sur l'erreur de prédiction

L'inversion de la matrice  $(\Phi_N^T \Phi_N)^{-1}$  demeure un inconvénient de la méthode des moindres carrés et en limite son utilisation, en particulier lors d'une identification en ligne. De plus, pour obtenir des estimés non-biaisés, on considère que le bruit de mesure n'est pas corrélé avec les données mesurées ; cette hypothèse est rarement satisfaite en pratique.

Pour remédier à cela, d'autres approches ont été développées, notamment les méthodes basées sur la minimisation de l'erreur de prédiction. Le principe de ces méthodes est décrit par le diagramme de la figure 4.3.

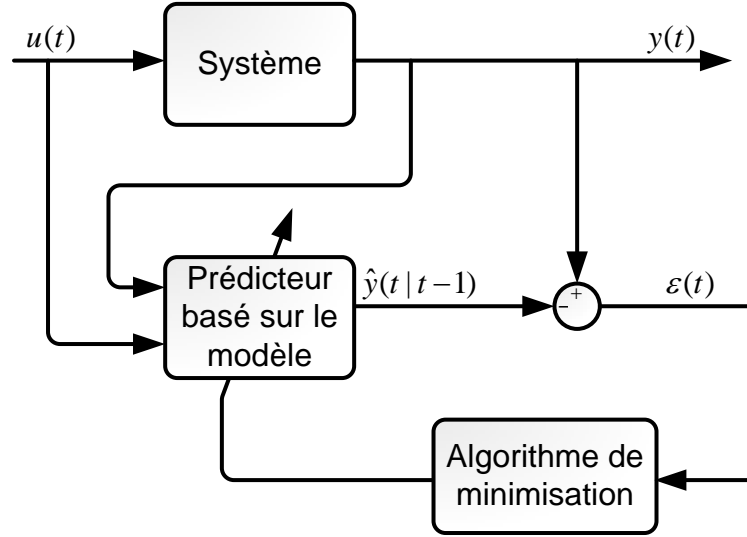


Figure 4.3 Diagramme de la méthode basée sur l'erreur de prédiction

L'erreur de prédiction  $\varepsilon(t)$  est la différence entre la sortie du système  $y(t)$  et la sortie prédite par le modèle  $\hat{y}(t|t-1)$ . Il est donc évident que l'erreur de prédiction doit être faible pour mieux estimer les paramètres du vecteur  $\theta$ . Mais avant d'entreprendre l'identification par les méthodes basées sur la minimisation de l'erreur de prédiction, (Söderström, 1989, chap. 7) propose les étapes suivantes afin de compléter le choix des éléments de la figure 4.3 :

- choix de la structure du modèle.
- choix du prédicteur à utiliser.
- choix du critère à minimiser.

#### ◆ Choix de la structure

Une étape primordiale est le choix de la structure du modèle à adopter. Pour cela, Nous allons considérer la structure générale suivante :

$$y(t) = G(z^{-1})u(t) + H(z^{-1})e(t) \quad (4.7)$$

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})F(z^{-1})} \quad (4.8)$$

$$H(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})D(z^{-1})} \quad (4.9)$$

où  $G(z^{-1})u(t)$  est la partie déterministe du modèle alors que  $H(z^{-1})e(t)$  est sa partie aléatoire.

La figure 4.4 représente le diagramme fonctionnel de cette structure générale :

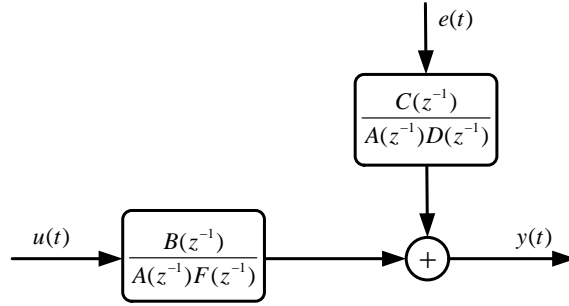


Figure 4.4 Structure générale pour l'identification

Les principaux modèles utilisés en pratique sont (Ljung, 1999, §4.2) :

◇ **Modèle autorécurif exogène (ARX<sup>1</sup>) :**

C'est la structure la plus simple des modèles et suppose que la perturbation possède la même dynamique que le modèle :

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t) + \frac{1}{A(z^{-1})}e(t) \quad (4.10)$$

◇ **Modèle autorécurif exogène à moyenne mobile (ARMAX<sup>2</sup>) :**

L'équation qui décrit la structure de ce type de modèle est la suivante :

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t) + \frac{C(z^{-1})}{A(z^{-1})}e(t) \quad (4.11)$$

Le vecteur des paramètres  $\theta$  est augmenté des coefficients de  $C(z^{-1})$  et permet de modéliser ainsi la fonction de transfert liée à la perturbation plus précisément que le modèle ARX.

---

1. *Auto-**R**egressive with e**X**ogenous input*  
 2. *Auto-**R**egressive **M**oving-**A**verage with e**X**ogenous inputs*



◇ **Modèle à erreur de sortie (OE<sup>3</sup>) :**

Dans ce modèle, l'erreur est considérée comme une erreur du type erreur de mesure affectant la sortie  $y(t)$ . Le modèle a la forme suivante :

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(t) + e(t) \quad (4.12)$$

On remarque que la fonction de transfert du procédé est dans ce cas  $\frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}$  au lieu de  $\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$  afin de distinguer les rôles de chacun des polynômes  $F(z^{-1})$  et  $A(z^{-1})$ .

◇ **Modèle de Box-Jenkins (BJ) :**

Cette structure offre une dynamique différente entre l'entrée et le bruit ce qui fait de lui le modèle le plus général. L'équation qui décrit cette structure est la suivante :

$$y(t) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(t) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}e(t) \quad (4.13)$$

Cependant, dans certaines applications, il est inutile d'avoir un modèle très général lorsqu'on peut avoir des ordres moins élevés pour le processus à identifier.

◆ **Choix du prédicteur**

Une étape tout aussi importante est le choix du prédicteur. Ainsi, nous considérons le prédicteur linéaire général suivant :

$$\hat{y}(t|t-1) = L_1(z^{-1})y(t) + L_2(z^{-1})u(t) \quad (4.14)$$

Il existe différentes manières de choisir les filtres  $L_1(z^{-1})$  et  $L_2(z^{-1})$ . La façon la plus utilisée est celle qui permet d'avoir, pour une structure de modèle donnée, des erreurs de prédiction de variance minimale.

Pour le cas général, la prédiction optimale est obtenue par (Ljung, 1999) :

$$\hat{y}(t|t-1) = [1 - H^{-1}(z^{-1})] y(t) + H^{-1}(z^{-1})G(z^{-1})u(t) \quad (4.15)$$

On déduit donc que l'erreur de prédiction  $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$  est :

$$\varepsilon(t) = H^{-1}(z^{-1}) [y(t) - G(z^{-1})u(t)] \quad (4.16)$$

Il est important de noter que si le modèle représente bien le système réel, l'erreur de prédiction va tendre vers un bruit blanc et  $\varepsilon(t) = e(t)$ .

Le diagramme de la figure 4.5 résume la procédure pour obtenir l'erreur de prédiction.

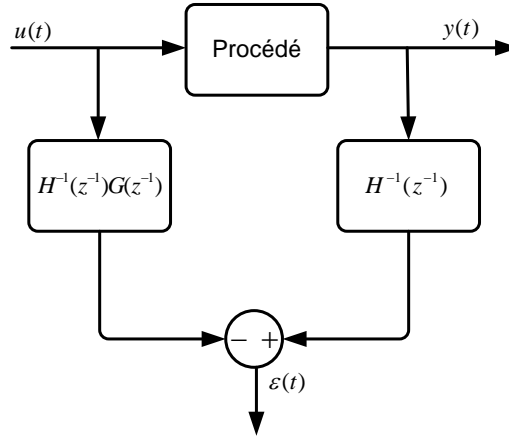


Figure 4.5 Diagramme fonctionnel pour le calcul de l'erreur de prédiction du modèle général

#### ◆ Choix du critère à minimiser

Tel que mentionné précédemment, un bon modèle revient à trouver les erreurs de prédiction les plus faibles. En effet, un critère à prendre dans ce cas est la somme des carrés des erreurs de prédiction :

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) \quad (4.17)$$

L'expression 4.17 de  $V(\theta)$  correspond à la variance des erreurs de prédiction lorsque  $N$ , le nombre de données récoltées, tend vers l'infini. On obtient donc les paramètres du modèle en minimisant la variance des erreurs de prédiction. Elles sont alors égales au bruit blanc qui génère la perturbation  $\varepsilon(t) = e(t)$  et on peut donc conclure qu'estimer les paramètres revient à blanchir les résidus.

Une fois le critère à minimiser choisi, il existe différentes méthodes numériques d'optimisation prédéfinies telles que la méthode de Newton-Raphson (Söderström, 1989) ou la méthode de Gauss-Newton (Söderström, 1989).

## 4.3 Aspects pratiques

### 4.3.1 Planification de l'expérience

Avant de commencer l'expérience, l'analyse physique du système à identifier est un bon indice de la durée et de l'allure du signal d'entrée à appliquer ainsi que de la période d'échantillonnage à utiliser lors de l'acquisition des données.

#### ♦ Choix de l'excitation :

Il est important de bien choisir le signal d'entrée pour avoir le plus d'information possible. Par exemple, si l'on excite un système par une sinusoïde pure, l'identification ne donnera que de l'information à la fréquence choisie. Donc, le signal d'entrée devrait être riche au niveau du contenu fréquentiel tel qu'un signal de type *Chirp* (figure 4.6a) ou *une séquence binaire aléatoire ou pseudo-aléatoire* (figure 4.6b).

#### ♦ Choix de la période d'échantillonnage :

Lors de l'acquisition des données par ordinateur, il est important de choisir la période d'échantillonnage de façon judicieuse. Certes, une très courte période d'échantillonnage permet d'avoir un signal en sortie similaire à celui en continu, mais elle peut amener les pôles du modèle en discret près de  $z = 1$ , ce qui peut mener à l'instabilité du modèle, sans négliger l'augmentation de la durée des calculs et des traitements par ordinateur.

D'autre part, une grande période d'échantillonnage peut occasionner une perte d'information nécessaire à la description du comportement du système physique réel. Aussi le théorème de Nyquist doit être respecté.

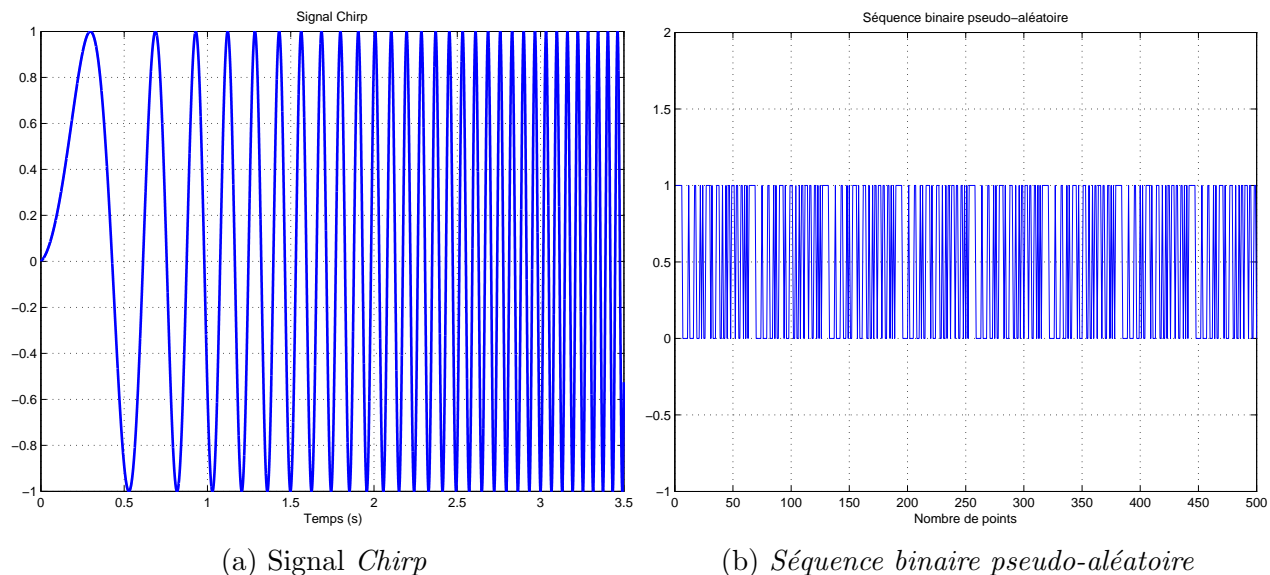


Figure 4.6 Exemple de choix de signaux pour l'identification

### 4.3.2 Traitement préliminaire des données

Une fois l'expérience effectuée, il est fortement recommandé d'analyser les données récoltées. L'analyse vise à déterminer la présence de points aberrants, des perturbations à hautes fréquences, etc.

#### ◇ Élimination des points aberrants :

Les points aberrants sont des mesures causées par la défaillance du système de mesures<sup>4</sup>. On peut les détecter à l'œil en traçant la courbe des données. Il reste après à les éliminer puis procéder à l'identification.

#### ◇ Perturbations aux hautes fréquences :

Il est nécessaire de bien filtrer les perturbations à hautes fréquences afin que le processus d'identification ne soit pas altéré par les perturbations externes. L'algorithme d'identification peut converger mais donnera des résultats erronés s'il tient compte de ces perturbations. Aussi, le filtre utilisé ne devrait pas modifier la dynamique du système original. Par exemple, l'utilisation d'un filtre passe-bande ayant une bande passante moins large que celle du processus étudié, changera les données expérimentales récoltées et faussera ainsi le modèle final élaboré.

---

4. Les capteurs, les convertisseurs analogique/numérique, etc.

### 4.3.3 Choix de la structure et validation du modèle

Avant d'exécuter les algorithmes d'identification, il faut bien sûr choisir la structure du modèle ainsi que son ordre. L'idée est d'exploiter au maximum l'information *a priori* sur le système étudié. Si, à partir des équations mathématiques, le comportement du système peut être modélisé, nous pouvons fixer alors le degré de la structure du modèle.

Le modèle trouvé doit être ensuite validé suivant différentes méthodes.

#### ♦ Simulations temporelles :

La simulation du modèle et la comparaison de sa sortie avec les mesures relevées à partir du système physique est une bonne première technique pour connaître le niveau de correspondance entre les deux résultats.

#### ♦ Somme résiduelle :

Cette technique consiste à calculer la somme des carrés des erreurs de prédiction et s'assurer qu'elle soit faible pour valider le modèle trouvé.

### 4.3.4 Outil informatique

Il existe différents logiciels interactifs d'identification. Dans notre cas, nous utilisons la boîte à outils **System Identification Toolbox**<sup>TM</sup> sous **Matlab**<sup>®</sup> et qui est développée par **MathWorks**<sup>®</sup>.

L'utilisateur a le choix de travailler à l'aide d'une interface graphique ou par les lignes de commande directement sous **Matlab**<sup>®</sup>. Les étapes d'utilisation sont les suivantes :

1. Données expérimentales : chargement et traitement des mesures comme le filtrage, soustraction de la valeur moyenne, etc.
2. Identification non paramétrique.
3. Identification paramétrique avec différents choix de structures de modèles : continus<sup>5</sup>, discrets, modèle d'états, non linéaires.
4. Simulations temporelles des modèles, tracés de la réponse en fréquence, réponse à l'échelon, etc.
5. Validation des modèles retenus.

---

5. Cette option vient d'être ajoutée à la version **R2012a** de **Matlab**<sup>®</sup> via la commande **tfest**. Elle est basée sur les résultats de (Garnier *et al.*, 2003).

La description des différentes fonctions implantées dans cet outil se trouve dans (MathWorks®, 2012c). Des exemples d'utilisation sont présentés dans (Ljung, 1999, chap. 17).

#### 4.4 Description du banc de test

##### ◆ Les pots vibrants

Le pot vibrant est l'élément principal dans l'étude des propriétés mécaniques des matériaux car il nous permet de générer les profils de vibration désirés. Trois types de pot vibrant, construits par la compagnie Brüel & Kjær, ont été étudiés :

##### ◇ Pot vibrant #1 :

Le premier pot vibrant étudié est le *Mini-Shaker type 4810* (figure 4.7). Le tableau 4.1 résume ses propriétés physiques et électriques (Brüel & Kjær, 2012a).



Figure 4.7 Le pot vibrant #1 : *Mini-Shaker 4810*, tiré de Brüel & Kjær (2012a)

Tableau 4.1 Caractéristiques du *Mini-Shaker 4810*

Fréquences d'utilisation	DC jusqu'à 18 kHz
Force maximale	10 N
Première résonance majeure	au-delà de 18 kHz
Accélération maximale de la table sans échantillons	$550 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Déplacement maximal	6 mm
Raideur	2 N/mm
Courant maximal d'entrée	1.8 A
Impédance de la bobine	$3.5 \Omega$ à 500 Hz
Masse du pot vibrant	1.1 kg

◇ **Pot vibrant #2 :**

Le deuxième pot vibrant étudié est le *LDS V203* (figure 4.8). Un résumé de ses caractéristiques est présenté au tableau 4.2 (Brüel & Kjær, 2012b).

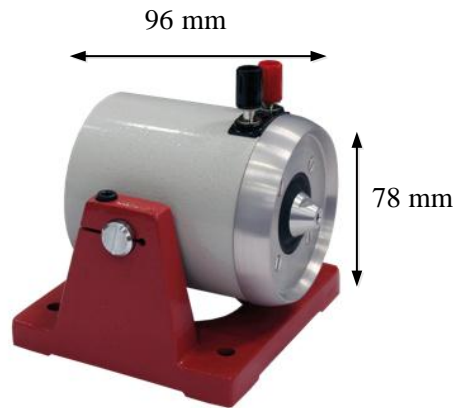


Figure 4.8 Le pot vibrant #2 : *LDS V203*, tiré de Brüel & Kjær (2012b)

Tableau 4.2 Caractéristiques du *LDS V203*

Fréquences d'utilisation	5 Hz jusqu'à 13 kHz
Force maximale	17.8 N
Première résonance majeure	13 kHz
Vitesse maximale	$1.83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Déplacement maximal	5 mm
Raideur	2.8 N/mm
Impédance de la bobine	$2 \Omega$ à 500 Hz
Masse du pot vibrant	3.17 kg

◇ **Pot vibrant #3 :**

Enfin, le troisième pot vibrant est le *Vibration Exciter - type 4809* (figure 4.9). Un résumé de ses propriétés est fourni dans le tableau 4.3 (Brüel & Kjær, 2012c).

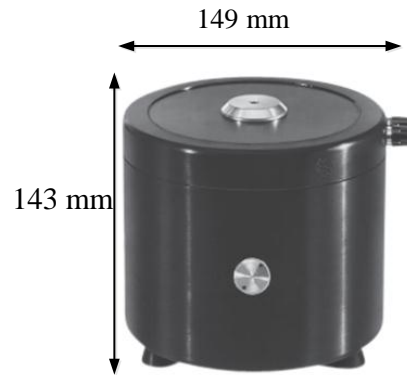


Figure 4.9 Le pot vibrant #3 : *Vibration Exciter - type 4809*, tiré de Brüel & Kjær (2012c)

Tableau 4.3 Caractéristiques du *Vibration Exciter - type 4809*

Fréquences d'utilisation	10Hz jusqu'à 20 kHz
Force maximale	44.5 N
Première résonance majeure	20 kHz
Accélération maximale de la table sans échantillons	$736 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Déplacement maximal	8 mm
Raideur	2 N/mm
Courant maximal d'entrée	5 A
Impédance de la bobine	$\approx 2 \Omega$ à 500 Hz
Masse du pot vibrant	8.3 kg

#### ◆ Le capteur de déplacement

Afin de mesurer le déplacement des échantillons, le capteur laser de déplacement *LK-G32* (Keyence, 2012) est implanté dans le rhéomètre. Le capteur récolte les données à chaque  $20 \mu\text{s}$  et les transfère au contrôleur qui les convertit en tension : un déplacement de 1 mm correspond à 1 V.

#### ◆ Système de génération et d'acquisition de signaux

Deux systèmes d'acquisition sont utilisés pour l'acquisition des données. Le premier système est dédié aux pots vibrants #1 et #2. Il s'agit de la carte NI PCIe-6343



développée par **National Instruments**<sup>™</sup>. Les signaux sont générés et acquis via une interface développée par l'entreprise sous le logiciel **LabVIEW**.

Le deuxième système est utilisé pour la source vibrante #3. Il est basé sur la carte NI PCI-6221 (37 broches) de **National Instruments**<sup>™</sup> également. Toutefois, le logiciel **Matlab**<sup>®</sup> est utilisé pour la génération et l'acquisition des signaux grâce à son outil temps-réel **xPC Target**<sup>™</sup>. Ce changement de système d'acquisition est nécessaire pour être en mesure d'implanter les lois de contrôle par la suite.

## 4.5 Modèles mathématiques des pots vibrants

### 4.5.1 Modèle général du pot vibrant

Le modèle de la figure 4.10 proposé par (Lang et Snyder, 2001) décrit les transferts entre les parties physiques qui constituent le pot vibrant. Les indices « D, T, C et B » réfèrent respectivement à l'échantillon (**D**evice), la table du pot vibrant (**T**able), la bobine (**C**oil) et le corps de la structure (**B**ody). Les masses  $M_i$  formant le système sont reliées entre elles par les ressorts  $K_i$  et les amortisseurs  $C_i$ .

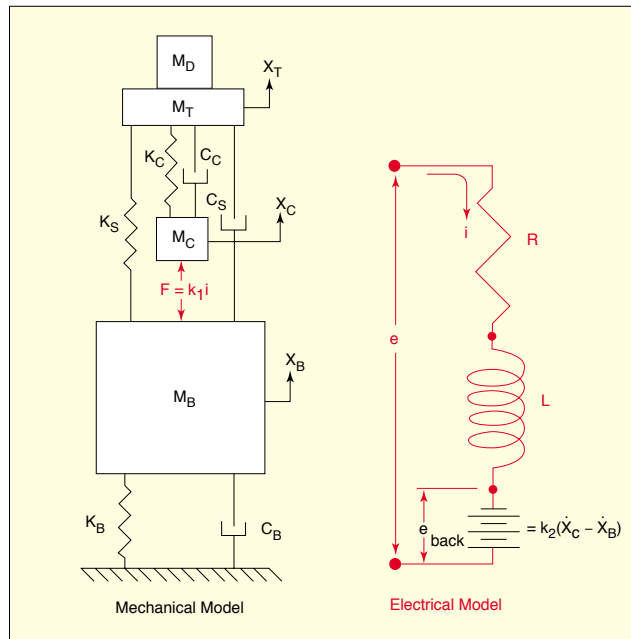


Figure 4.10 Modèles mécanique et électrique du pot vibrant, tirés de (Lang et Snyder, 2001)

Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} M_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_T + M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_C \\ \ddot{X}_T \\ \ddot{X}_B \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_C & -C_C & 0 & 0 \\ -C_C & C_C + C_S & -C_S & 0 \\ 0 & -C_S & C_B + C_S & 0 \\ k_2 & 0 & -k_2 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_C \\ \dot{X}_T \\ \dot{X}_B \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} K_C & -K_C & 0 & -k_1 \\ -K_C & K_C + K_S & -K_S & 0 \\ 0 & -K_S & K_B + K_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_C \\ X_T \\ X_B \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix} \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

La fonction de transfert reliant le déplacement  $x_T$  par rapport à l'équilibre et la tension  $e$  appliquée à l'entrée du pot vibrant est d'ordre 7. On remarque aussi que ce modèle détaillé fait appel à différentes valeurs de paramètres physiques qui ne sont pas fournies dans les fiches techniques des pots vibrants. Cependant, on peut faire certaines hypothèses afin d'avoir des modèles plus simples pour commencer l'identification.

#### 4.5.2 Modèles simplifiés du pot vibrant

##### ◆ Modèle à deux degrés de liberté

Afin de réduire l'ordre du modèle en 4.18, nous considérons que la base du pot vibrant est fixe. En effet, cette hypothèse est valable vu que la source vibrante est installée sur un support fixe, isolé des vibrations environnantes. D'autre part, la dynamique de la partie électrique peut être négligée par rapport à la dynamique générale du système mécanique.

Basé sur ces deux hypothèses, le modèle trouvé est d'ordre 4 et sa fonction de transfert est la suivante :

$$\frac{x_T}{e} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad (4.19)$$

où

$$N_1(s) = k_1 (C_C s + K_C)$$

$$\begin{aligned}
 D_1(s) = & M_C (M_T + M_D) s^4 + [M_C (C_S + C_C) + C_C (M_T + M_D) + k_1 k_2 (M_T + M_D)] s^3 \\
 & + [M_C (K_S + K_C) + C_C (C_C + C_S) + K_C (M_T + M_D) - C_C^2 + k_1 k_2 (C_C + C_S)] s^2 \\
 & + [C_C (K_S + K_C) + K_C (C_C + C_S) + k_1 k_2 (K_C + K_S) - 2C_C K_C] s + K_C K_S
 \end{aligned}$$

##### ◆ Modèle à un degré de liberté

Le modèle le plus simple pouvant être utilisé est celui d'un système classique du deuxième ordre composé d'une masse  $M$ , d'un ressort  $K$  et d'un amortisseur  $C$  (Lang, 1997). Le système

est soumis à une tension en entrée  $u(t)$  et le déplacement  $x$  de la masse est la seule mesure disponible.

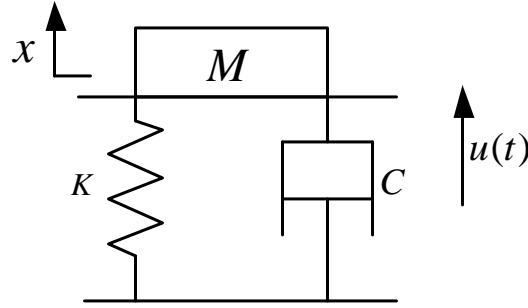


Figure 4.11 Modèle dynamique du pot vibrant à 1 degré de liberté

La structure de la figure 4.11 est obtenue grâce aux deux suppositions suivantes. Tout d'abord, le lien de contact entre la table du pot vibrant et sa bobine est considéré rigide et par conséquent elles peuvent être représentées comme une seule masse. Ensuite, le support du pot vibrant étant fixe, il permet d'annuler les effets de l'interaction du sol avec la base de la source vibrante.

L'équation du mouvement qui régit ce système est :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = u \quad (4.20)$$

qui conduit à la fonction de transfert suivante :

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{C}{M}s + \frac{K}{M}} \quad (4.21)$$

L'équation 4.21 sera considérée comme le premier choix de structure lors de l'identification. Elle sera adoptée si les résultats trouvés sont validés sinon on augmentera le degré du système jusqu'à ce que nous convergions vers de bons paramètres.

## 4.6 Modèle du pot vibrant #1

### 4.6.1 Analyse et traitement des mesures expérimentales

#### ◆ Protocole expérimental

Afin de faire l'acquisition des données nécessaires à l'identification, des porte-échantillons de masses différentes sont vissées sur la table du pot vibrant. Elles sont ensuite soumises à des vibrations de type *Transient* à plusieurs fréquences. Les tableaux 4.4 et 4.5 montrent respectivement les masses<sup>6</sup> et les fréquences utilisées sur le premier pot vibrant.

Tableau 4.4 Masses utilisées : pot vibrant #1

$M_1$	38.01 g
$M_2$	58.91 g
$M_3$	87.65 g
$M_4$	121.39 g
$M_5$	141.60 g
$M_6$	160.12 g

Tableau 4.5 Fréquences utilisées : pot vibrant #1

$f_1$	300 Hz
$f_2$	400 Hz
$f_3$	500 Hz
$f_4$	600 Hz
$f_5$	700 Hz
$f_6$	800 Hz

#### ◆ Traitement des données

Le bruit dans les données recueillies devient de plus en plus important lorsque la masse et la fréquence augmentent ce qui nuit aux performances des algorithmes d'identification. Nous avons alors lissé les courbes à l'aide d'une moyenne mobile pour préserver la même dynamique que le système réel et diminuer les variations causées par le capteur de déplacement. Les figures 4.12a et 4.12b illustrent cela.

---

6. Les données de la masse  $M_4$  sont utilisées lors de l'étape de validation et non celle d'identification.

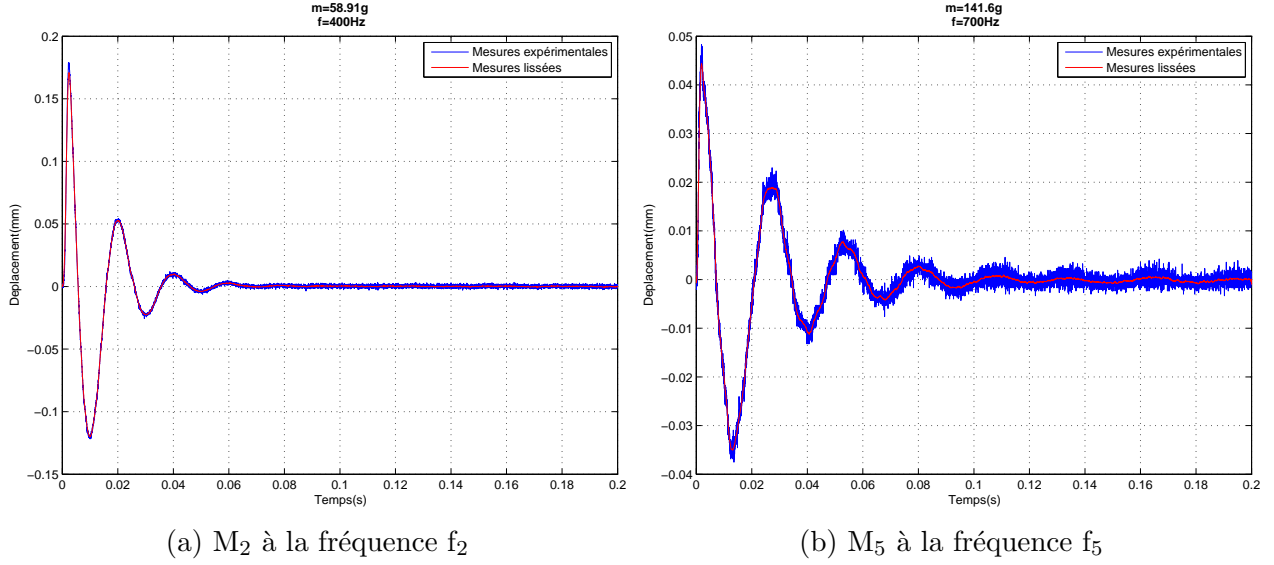


Figure 4.12 Pot vibrant #1 : exemple de lissage des données

#### 4.6.2 Paramètres identifiés

##### ◆ Choix de la structure

La structure choisie pour le pot vibrant #1 est de type **ARMAX** d'ordre 2 suite à l'analyse suivante :

1. La première phase consiste à tester les différentes structures décrites précédemment (voir §4.2.2). Au terme de cette étape, les deux structures **ARMAX** et **BJ** génèrent les erreurs de prédiction les plus faibles et sont donc retenues.
2. La deuxième phase est le choix de l'ordre de la structure. En se basant sur les modèles mathématiques proposés plus tôt, les structures **ARMAX** et **BJ** d'ordre 4 sont utilisées. Leurs résultats convergent vers les mêmes paramètres. De ce fait, nous privilégions la structure **ARMAX** à **BJ** car elle permet d'avoir les mêmes résultats avec moins de paramètres à calculer.
3. Enfin, il est possible de diminuer l'ordre du modèle passant d'un ordre 4 à un ordre 2 sans modifier son comportement temporel. Cette approximation permet de conclure que la représentation du modèle du pot vibrant #1 est similaire à celle de la figure 4.11,

c'est à dire<sup>7</sup> :

$$G_1(s) = \frac{a_{11}}{s^2 + b_{12}s + b_{13}} \quad (4.22)$$

Elle est obtenue en transformant la fonction de transfert du domaine discret au domaine continu en utilisant un bloqueur d'ordre zéro à travers la fonction `d2c` de **Matlab**<sup>®</sup>.

Il reste alors à identifier les paramètres  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  pour chacune des masses pour ensuite tracer leurs variations en fonction des masses des porte-échantillons.

### ◆ Modèle identifié

Vu que les masses fixées sur le pot vibrant varient, le déplacement résultant change également. L'idée est donc d'identifier pour chaque masse les paramètres de la fonction de transfert 4.22. Cette procédure est répétée pour chaque fréquence d'entrée afin d'étudier la convergence des résultats.

Enfin, le résultat est tracé en fonction de la masse, ce qui nous permettra d'interpoler l'évolution de tous les paramètres identifiés par rapport au masses des porte-échantillons utilisés.

Le premier élément identifié est le paramètre  $a_{11}$ . L'analyse des résultats de l'identification montre qu'il décroît en fonction de la masse comme le montre la figure 4.13.

La variation de  $a_{11}$  en fonction de la masse est alors :

$$a_{11}(M) = (-5.7290 \times 10^7) M^3 + (2.4350 \times 10^7) M^2 + (-3.724 \times 10^6) M + 2.52 \times 10^5 \quad (4.23)$$

---

7. Les indices des paramètres  $a$  et  $b$  sont attribués selon le pot vibrant étudié (*premier indice*) et leurs ordres dans la fonction de transfert (*deuxième indice*). Par exemple,  $b_{12}$  est le deuxième paramètre du dénominateur du pot vibrant #1

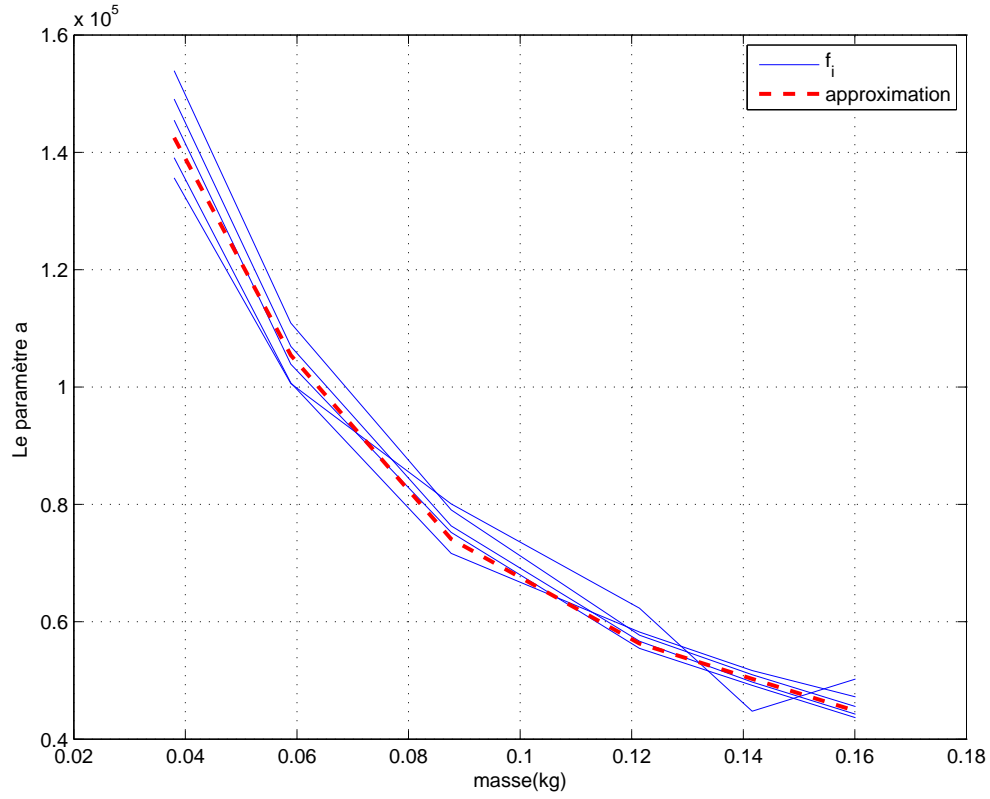


Figure 4.13 Résultats d'identification du paramètre  $a_{11}$

On procède de la même façon pour  $b_{12}$  et  $b_{13}$ . Les figure 4.14 et 4.15 présentent les courbes pour lesquelles on déduit que :

$$b_{12}(M) = (-4.4325 \times 10^4) M^3 + (2.2473 \times 10^4) M^2 + (-4.1 \times 10^3) M + 3.3 \times 10^2 \quad (4.24)$$

$$b_{13}(M) = (-7.4 \times 10^7) M^3 + (2.9 \times 10^7) M^2 + (-4 \times 10^6) M + 2.5 \times 10^5 \quad (4.25)$$

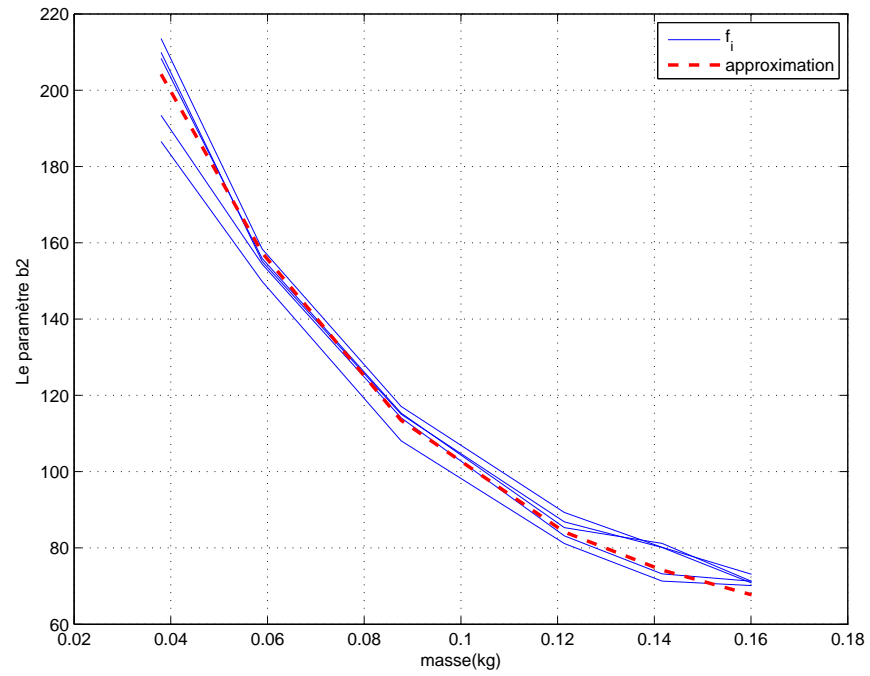


Figure 4.14 Résultats d'identification du paramètre  $b_{12}$

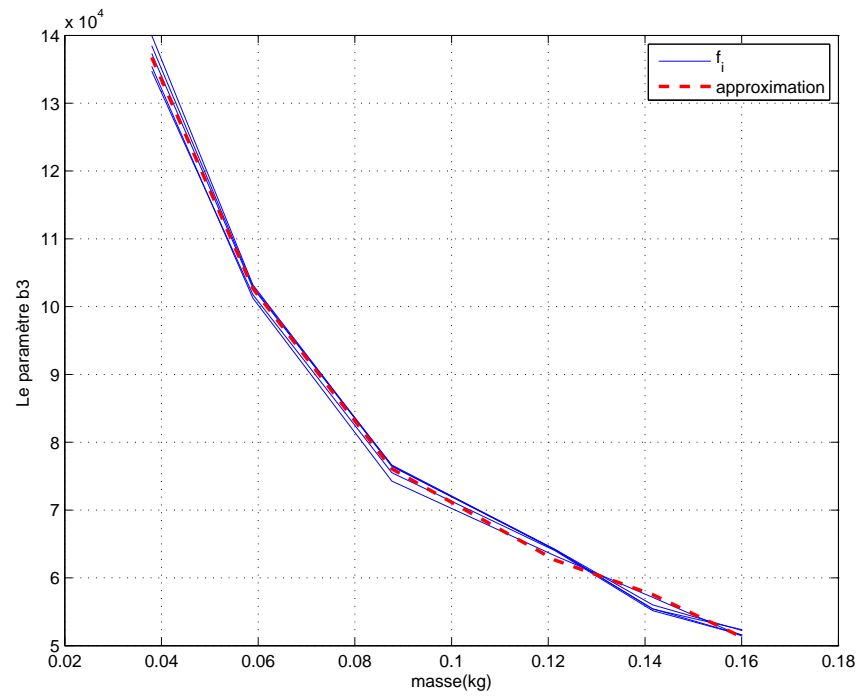


Figure 4.15 Résultats d'identification du paramètre  $b_{13}$



Les résultats numériques de l'identification qui ont permis de tracer les figures ci-haut sont compilés dans les tableaux B.1, B.2, B.3 de l'annexe B.1.

### ◆ Validation des résultats

Lors de cette étape, le modèle développé plus haut est validé en comparant sa simulation temporelle aux mesures expérimentales de la masse  $M_4$ . Ces données expérimentales, pour la masse  $M_4$ , ces données expérimentales n'ayant pas été utilisées lors de l'identification.

On remarque que le modèle reprend fidèlement les mesures expérimentales malgré la présence d'un léger déphasage comme le montrent les figures 4.16 et 4.17.

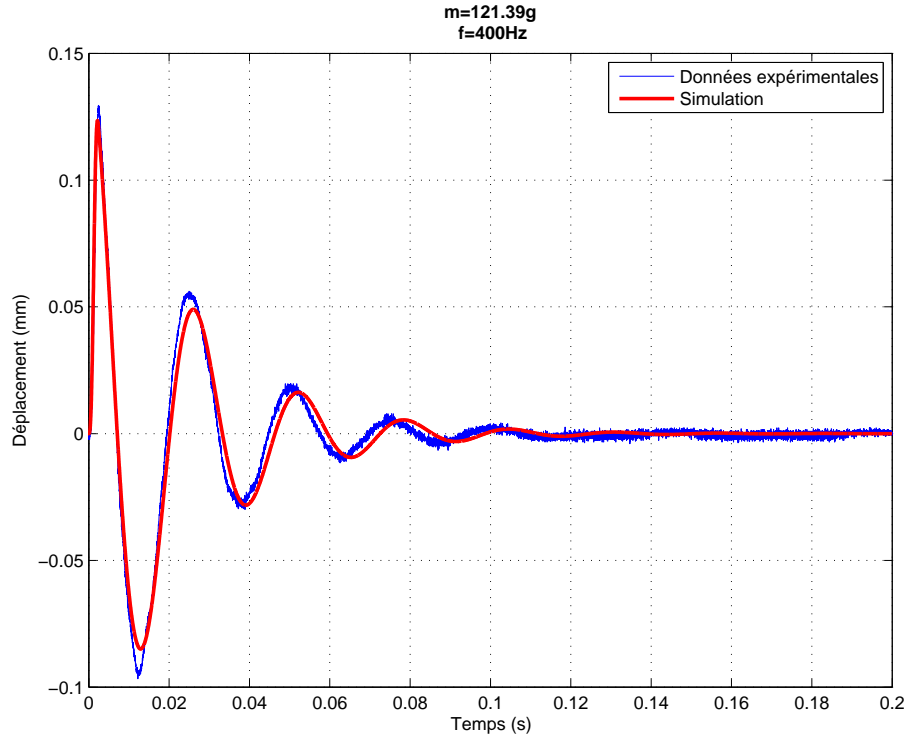


Figure 4.16 Validation du modèle du pot vibrant #1 pour  $M_4$  à la fréquence  $f_2$

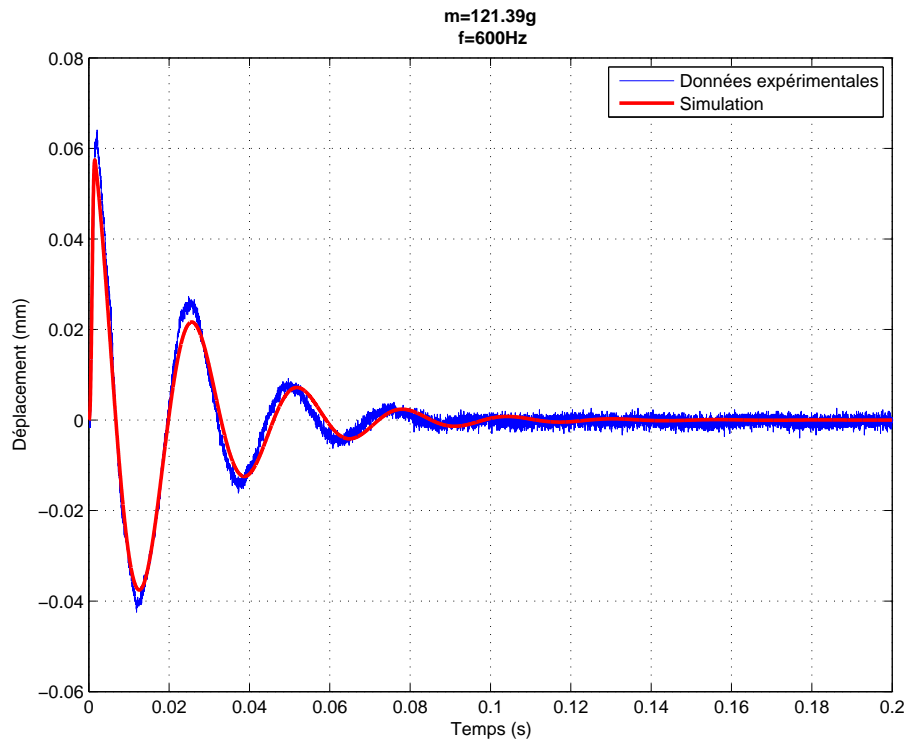


Figure 4.17 Validation du modèle du pot vibrant #1 pour  $M_4$  à la fréquence  $f_4$

Une autre façon de valider le modèle est l'analyse de l'erreur de prédiction. La figure 4.18 montre un exemple des résultats obtenus pour la masse  $M_1$  où l'on constate que l'erreur de prédiction est grande au début de l'identification puis tend vers sa valeur minimale lorsque les points de mesures augmentent. Cette étape de validation est vérifiée pour toutes les autres masses.

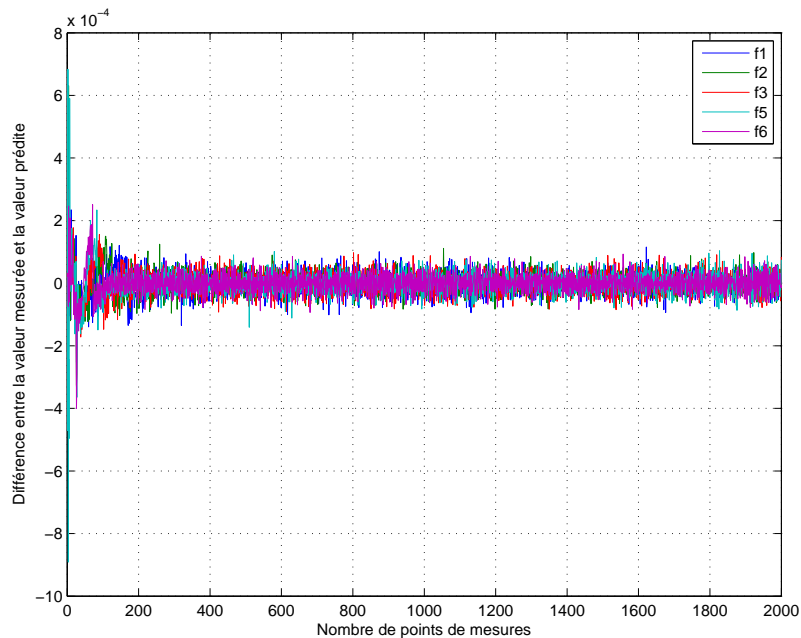


Figure 4.18 Erreurs de prédiction relatives à la masse  $M_1$

Suite à ces deux étapes, nous pouvons conclure que le modèle établi représente la source vibratoire #1 et sera la base de la conception des lois de commande qui permettront l'atteinte des objectifs.

#### 4.7 Modèle du pot vibrant #2

Nous avons procédé de façon similaire pour l'identification du modèle du pot vibrant #2<sup>8</sup>.

##### ◆ Protocole expérimental

Le même protocole expérimental a été suivi pour les masses et les fréquences présentées aux tableaux 4.6 et 4.7 :

---

8. Voir § 4.6.

Tableau 4.6 Masses utilisées : pot vibrant #2

$M_1$	35.2 g
$M_2$	52.9 g
$M_3$	75.2 g
$M_4$	106.5 g
$M_5$	129.9 g
$M_6$	138.4 g

Tableau 4.7 Fréquences utilisées : pot vibrant #2

$f_1$	100 Hz
$f_2$	200 Hz
$f_3$	300 Hz
$f_4$	400 Hz
$f_5$	500 Hz
$f_6$	600 Hz
$f_7$	700 Hz
$f_8$	800 Hz

### ◆ Traitement des données

Nous remarquons aussi que dans ce deuxième cas d'étude le bruit de mesure est significatif lorsque la masse et la fréquence augmentent. Nous utilisons, donc, une moyenne mobile afin de lisser les réponses temporelles enregistrées avant de commencer le processus d'identification. Les figures 4.19a et 4.19b présentent des exemples des résultats obtenus :

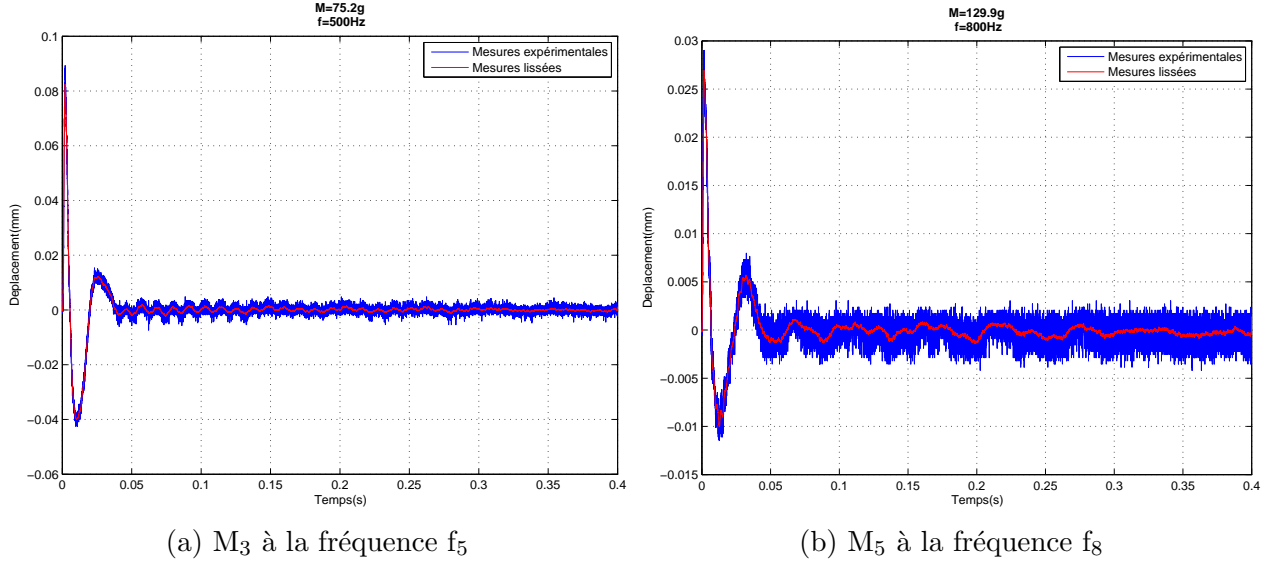


Figure 4.19 Pot vibrant #2 : exemple de lissage des données

### ◆ Résultats de l'identification

Le choix de la structure du modèle est basé sur la même approche que celle utilisée dans le cas du premier pot vibrant et la fonction de transfert adoptée au final est la suivante :

$$G_2(s) = \frac{a_{21}}{s^2 + b_{22}s + b_{23}} \quad (4.26)$$

Il reste donc à trouver les différents paramètres pour chacune des masses et fréquences utilisées. Au terme de l'identification, nous constatons que les paramètres convergent uniquement pour les masses  $M_1$  à  $M_4$  et aux fréquences allant de  $f_1$  à  $f_5$ .

Une première explication est la possibilité que le choix de la structure du modèle n'est pas adéquat. Nous avons donc testé différentes structures avec des degrés différents mais le constat est le même ; les paramètres ne présentent pas des variations uniformes selon la masse et la fréquence utilisées.

Enfin, nous avons trouvé que le pot vibrant présente un défaut de fabrication. La tête du pot vibrant se déplace de façon verticale telle que désirée mais aussi de façon latérale ce qui fausse bien évidemment les mesures du capteur de déplacement. Ce pot vibrant ne sera pas utilisé pour le développement des lois de commande.

Toutefois, nous présentons les graphes des paramètres en fonction de la masse qui ont convergés après identification (figures 4.20, 4.21 et 4.22). Les résultats pour toutes les masses et fréquences se trouvent dans les tableaux B.4, B.5 et B.6 de l'annexe B.2.

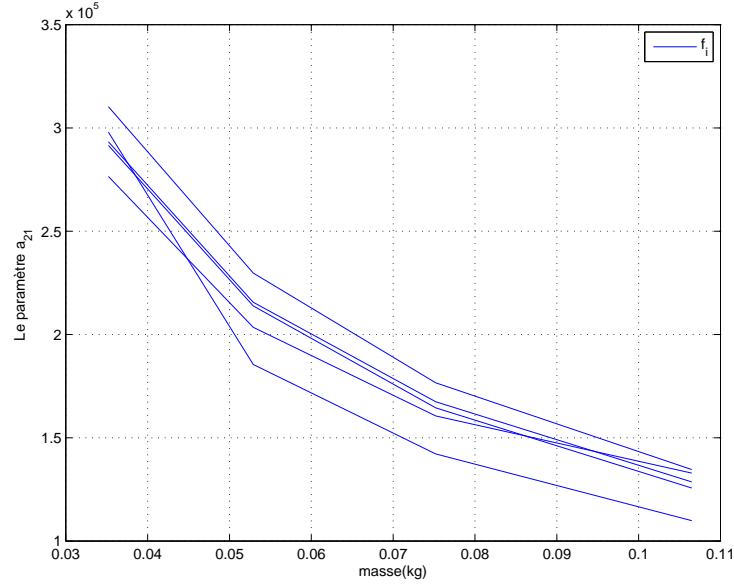


Figure 4.20 Résultats d'identification du paramètre  $a_{21}$

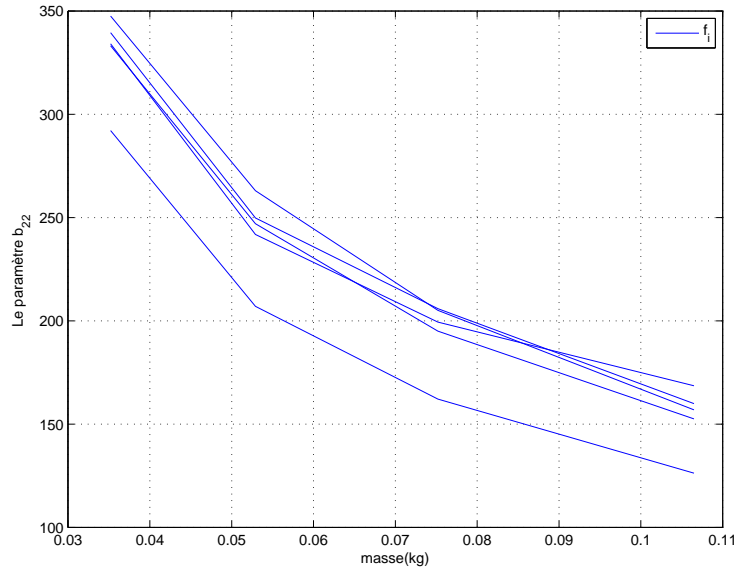


Figure 4.21 Résultats d'identification du paramètre  $b_{22}$

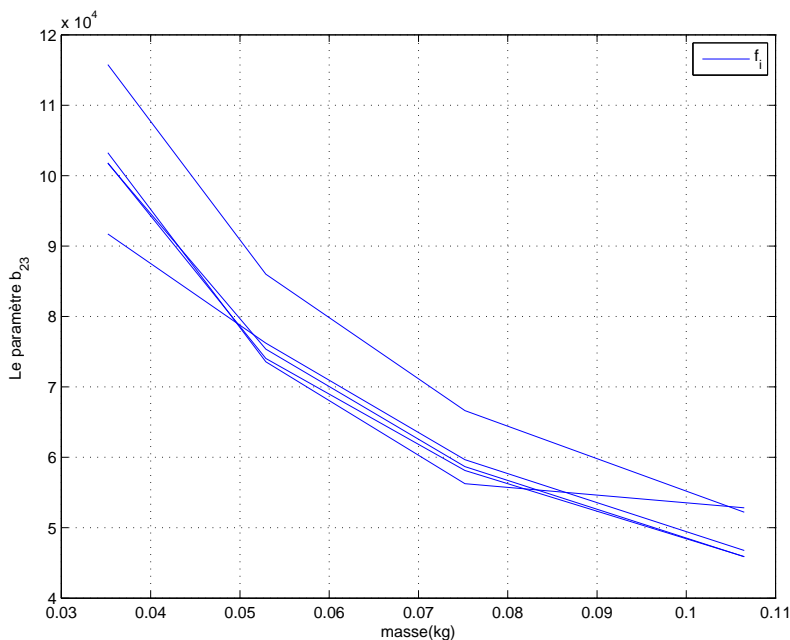


Figure 4.22 Résultats d'identification du paramètre  $b_{23}$

On constate qu'un modèle initial peut être déduit pour ce genre de pot vibrant en se basant sur les figures ci-haut. En effet, les paramètres ont tendance à décroître avec la masse presque de la même manière que les paramètres du pot vibrant #1, ce qui laisse supposer qu'on pourrait avoir à peu près les mêmes approximations.

## 4.8 Modèle du pot vibrant #3

### 4.8.1 Analyse et traitement des mesures expérimentales

#### ◆ Protocole expérimental

Le système d'acquisition de données initial utilisé pour les deux premiers pots vibrants est remplacé par une nouvelle carte d'acquisition comme nous l'avons déjà mentionné plus haut<sup>9</sup>.

En outre, Le logiciel nécessaire pour la génération et le traitement des données est substitué<sup>9</sup> par Matlab<sup>®</sup>. Ce changement nous procure plus de flexibilité dans la génération des signaux de commande.

---

9. voir pp. 30

Les masses des quatre porte-échantillons sont présentés dans le tableau 4.8 :

Tableau 4.8 Masses utilisées : pot vibrant #3

$M_1$	62.4 g
$M_2$	79.9 g
$M_3$	115.3 g
$M_4$	135.9 g

Vu que nous pouvons maintenant choisir nous-mêmes l'entrée à tester sur le pot vibrant, nous décidons d'appliquer un échelon au système qui est un signal plus riche en contenu fréquentiel que le signal *Transient*. Toutefois, les données expérimentales du déplacement du pot vibrant pour une entrée *Transient* ou *Blackman* à différentes fréquences sont utilisées dans la validation du modèle identifié à la fin.

#### ◆ Analyse des données

Les réponses du système pour une entrée échelon d'amplitude 0.5 V ainsi que pour une entrée *transient* de 10 Hz sont présentées aux figures 4.23a et 4.23b respectivement :

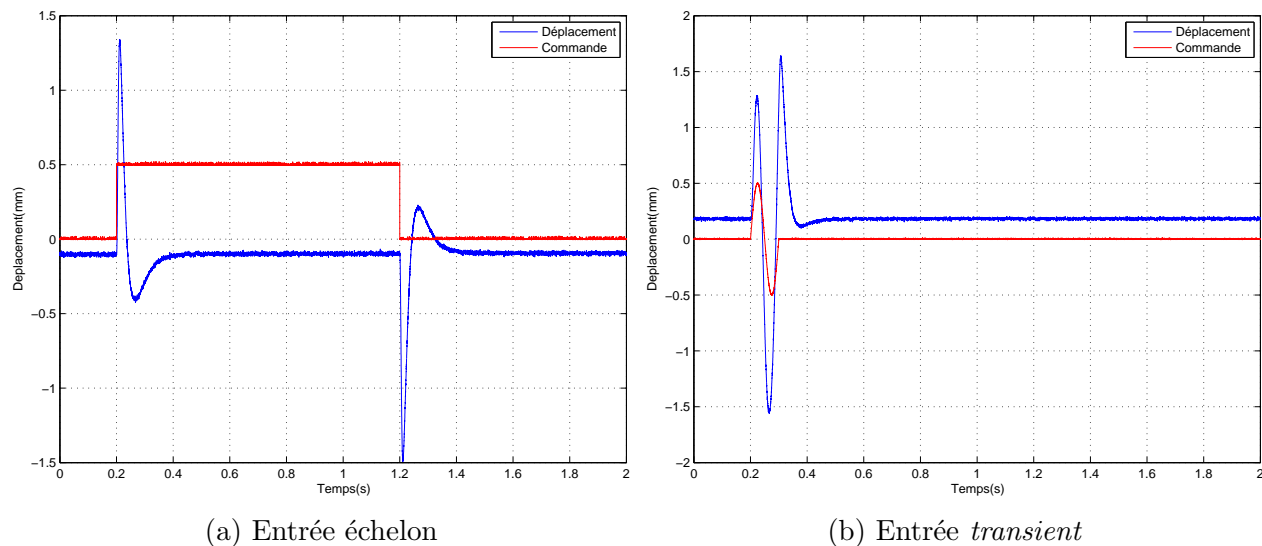


Figure 4.23 Pot vibrant #3 : déplacement de la masse  $M_2$

On remarque, premièrement, que le rapport signal à bruit est grand pour les deux types de signaux d'entrée ce qui nous évite le filtrage ou le lissage des données expérimentales.



Deuxièmement, le capteur laser affiche un *offset* dans la mesure du déplacement. Cette valeur doit être soustraite avant d'appliquer l'algorithme d'identification sur les données récoltées.

Finalement, le comportement général du troisième pot vibrant est différent des deux premiers. Tout d'abord, le pot vibrant revient à sa position de repos même si une tension continue est encore appliquée à son entrée. On conclut donc que le système possède au moins un dérivateur introduit par l'amplificateur audio pour protéger les systèmes tels que les haut-parleurs<sup>10</sup>. Ensuite, dans la réponse au signal *Transient*, le pot vibrant ne se déplace pas de la même manière que les deux premières sources vibrantes ; la structure du modèle se doit par conséquent d'être différente dans ce troisième cas.

#### 4.8.2 Paramètres identifiés

##### ◆ Structure du modèle

La structure que nous avons choisie est celle d'un système avec deux degrés de liberté décrit par le système d'équation 4.18. C'est une structure d'ordre 4 avec un zéro au numérateur. On ajoutera aussi un dérivateur suite à la remarque faite précédemment :

$$G_3(s) = \frac{a_{31}s^2 + a_{32}s}{s^4 + b_{32}s^3 + b_{33}s^2 + b_{34}s + b_{35}} \quad (4.27)$$

##### ◆ Modèle identifié

Nous procédons toujours de la même façon qui est d'estimer les paramètres  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  pour chacun des porte-échantillons pour ensuite tracer leur évolution en fonction de la masse. Toutefois, une étape est ajoutée dans notre étude où l'on réalise la même expérience plusieurs fois afin de s'assurer que les paramètres convergent vers leur valeur réelle. Une fois cette étape validée, la combinaison des résultats de ces expériences est tracée en fonction de la masse des quatre porte-échantillons<sup>11</sup>.

Les paramètres identifiés  $a_{31}$  et  $a_{32}$  décroissent en fonction de la masse tel que le montre la figure 4.24. La variation de  $a_{31}$  en fonction de la masse est approximée par l'équation suivante :

$$a_{31}(M) = (1.46 \times 10^7) M^2 + (-4.71 \times 10^6) M + 5.89 \times 10^5 \quad (4.28)$$

---

10. La caractérisation du haut-parleur nous a permis de confirmer cela

11. La réponse à un échelon est réalisée cinq fois sur le pot vibrant pour chacune des quatre masses.

De la même façon le paramètre  $a_{32}$  est approximé par :

$$a_{32}(M) = (-6.51 \times 10^6) M + 1.62 \times 10^6 \quad (4.29)$$

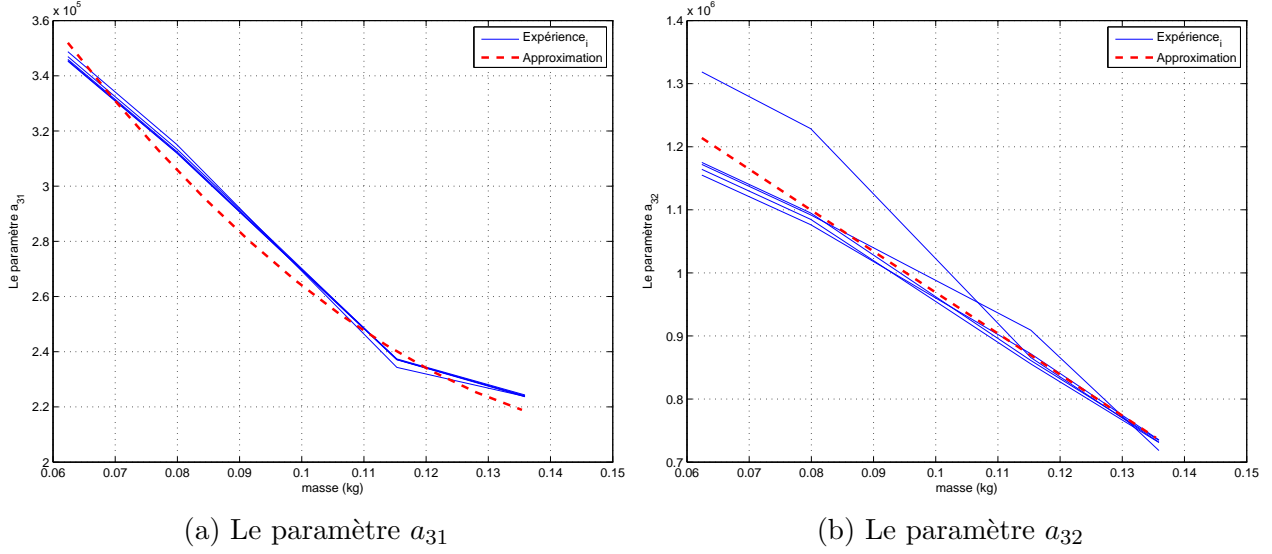


Figure 4.24 Paramètres identifiés du numérateur de  $G_3$

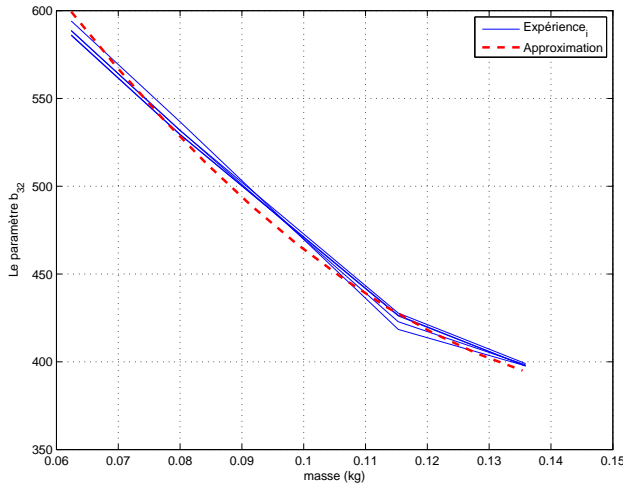
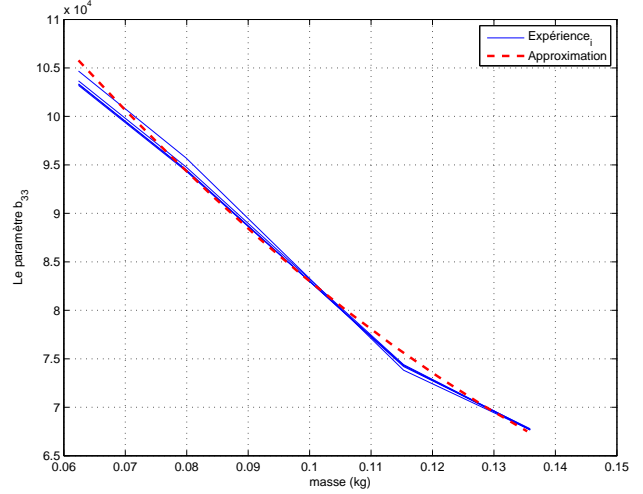
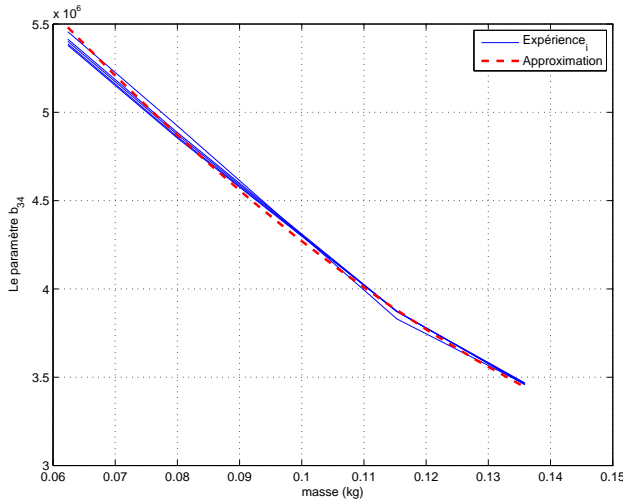
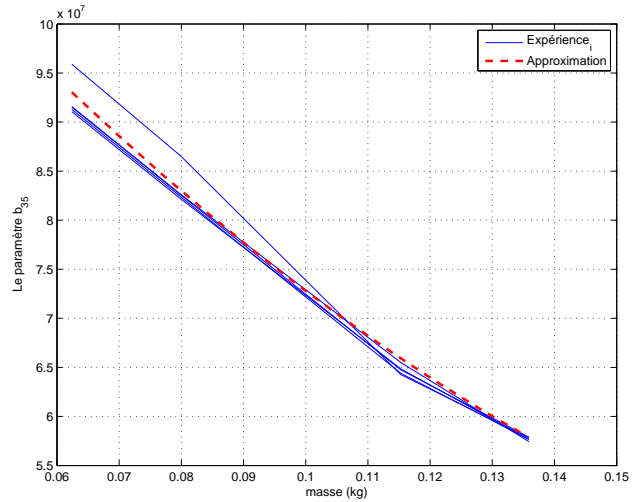
Au niveau du dénominateur, les résultats obtenus sont ceux présentés à la figure 4.25 et les approximations pour chacun des paramètres  $b_{ij}$  sont :

$$b_{32} = (2.26 \times 10^4) M^2 + (-7.27 \times 10^3) M + 965 \quad (4.30)$$

$$b_{33} = (2.31 \times 10^6) M^2 + (-9.81 \times 10^5) M + 1.58 \times 10^5 \quad (4.31)$$

$$b_{34} = (1.25 \times 10^8) M^2 + (-5.25 \times 10^7) M + 8.27 \times 10^6 \quad (4.32)$$

$$b_{35} = (1.66 \times 10^9) M^2 + (-8.08 \times 10^8) M + 1.37 \times 10^8 \quad (4.33)$$

(a) Le paramètre  $b_{32}$ (b) Le paramètre  $b_{33}$ (c) Le paramètre  $b_{34}$ (d) Le paramètre  $b_{35}$ Figure 4.25 Paramètres identifiés du dénominateur de  $G_3$ 

On constate que les paramètres varient en fonction de la masse du porte-échantillon testé. De plus, les résultats des cinq expériences pour la même masse et la même entrée convergent, en moyenne, vers le même résultat.

Les résultats numériques qui ont permis de tracer les figures précédentes sont listés dans l'annexe B.3.

### ◆ Validation du modèle

Pour valider notre modèle, nous allons utiliser les données expérimentales recueillies pour des entrées de type *Transient* et *Blackman* à différentes fréquences et masses.

Les résultats de validation avec la première masse sont présentés à la figure 4.26 et on remarque que le modèle reproduit le même déplacement que celui obtenu lors de l'expérience pour les deux entrées *Transient* et *Blackman* à différentes gammes fréquentielles.

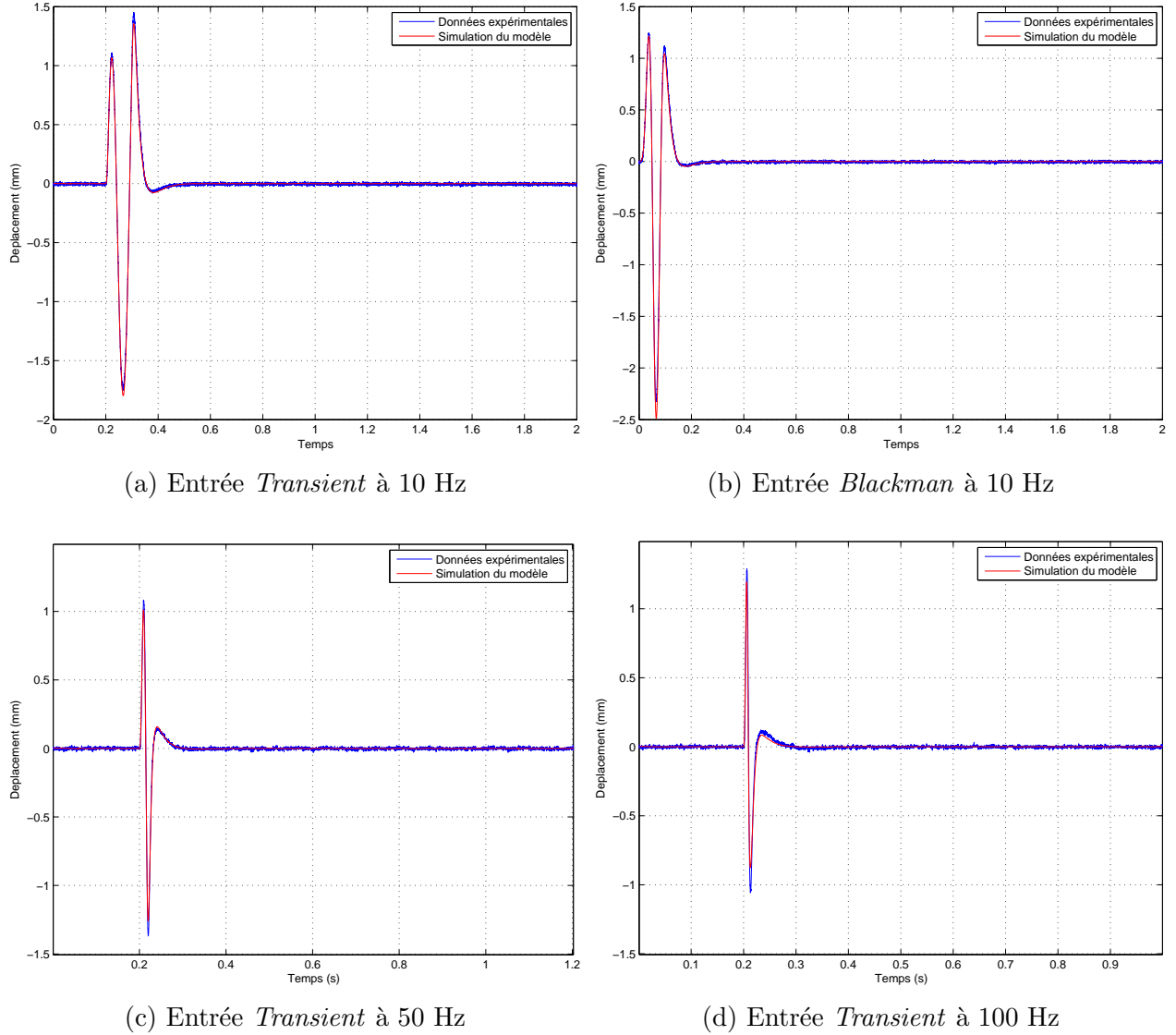


Figure 4.26 Validation du modèle  $G_3$  pour la masse  $M_1$

La même conclusion que pour le test de validation de la masse  $M_1$  est retenue pour la masse  $M_4$  (voir figure 4.27).

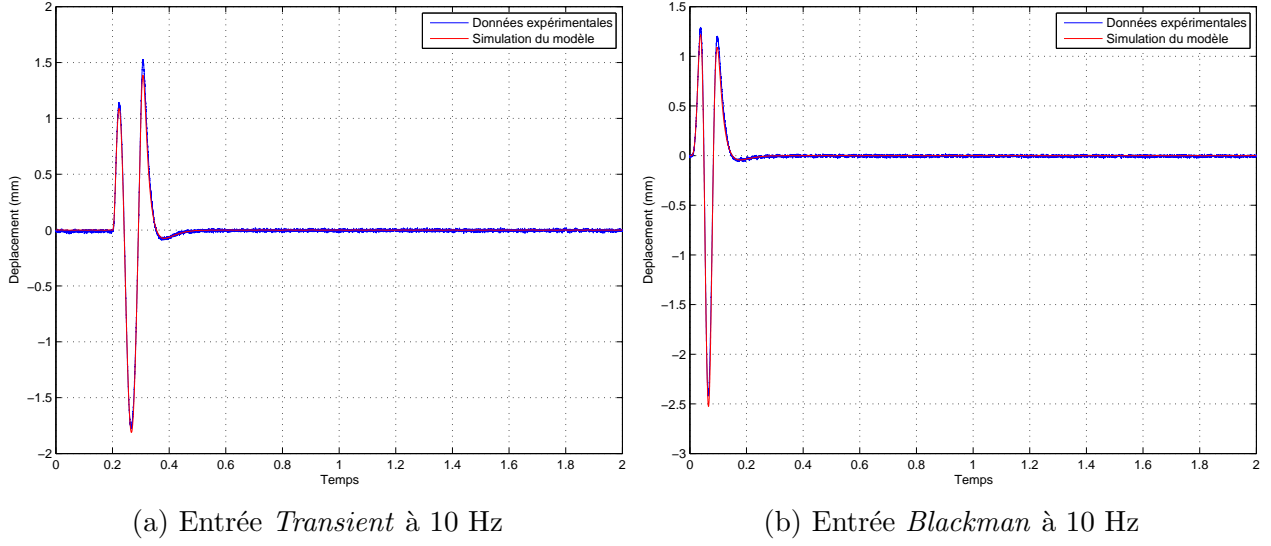


Figure 4.27 Validation du modèle  $G_3$  pour la masse  $M_4$

La réponse fréquentielle de la figure 4.28 valide également notre modèle pour les fréquences allant de 5 Hz jusqu'à 200 Hz. Les données utilisées pour tracer cette figure se trouvent dans le tableau B.13 de l'annexe B.4.

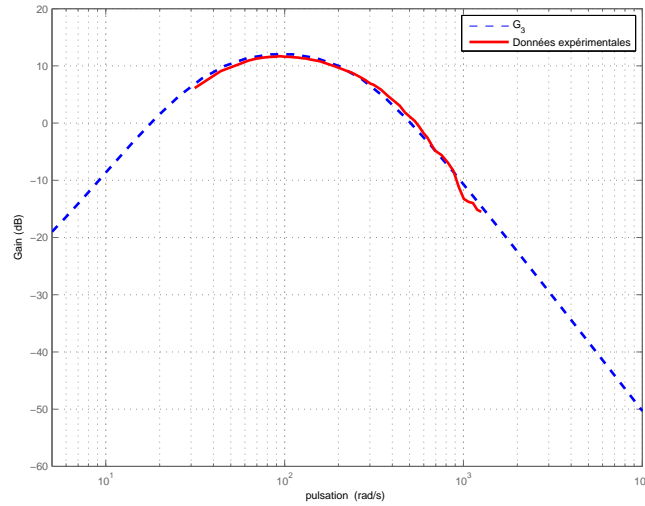


Figure 4.28 Validation du modèle  $G_3$  par la réponse fréquentielle – Masse  $M_2$

Suite à ces tests de validation et de comparaison, nous concluons que le modèle  $G_3(s)$  décrit assez fidèlement le comportement général du pot vibrant #3 et sera celui utilisé pour la conception des contrôleurs pour assurer l'asservissement de la source vibrante #3.

## 4.9 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre l'identification des paramètres des pots vibrants utilisés dans ce projet. Les modèles obtenus pour les pots vibrants #1 et #3 ont été validés sur de nouvelles données expérimentales. En revanche, le modèle du pot vibrant #2 n'a pu être établi à cause de la divergence des résultats d'identification ; un défaut de fabrication engendrait en effet un déplacement latéral en plus du déplacement vertical.

## CHAPITRE 5

### Conception des contrôleurs

Les modèles identifiés et validés des pots vibrants #1 et #3 sont utilisés dans ce chapitre pour la conception de lois de commande à des fins de poursuite des trois signaux de références décrits dans le chapitre 2.

Ce chapitre est divisé en trois parties. On commence par un rappel théorique des méthodes de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mathcal{H}_\infty$  structurée et des méthodes d'analyse via les applications gardiennes et la  $\mu$ -analyse. Pour chacune de ces méthodes, on incorpore un exemple d'utilisation où l'on décrit les commandes utilisées.

La deuxième partie du chapitre concerne le développement et les résultats de trois lois de commande pour les deux pots vibrants. On commence par un correcteur classique, soit un correcteur à retard de phase, et on enchaîne ensuite par un correcteur robuste plus évolué via la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . Le choix de ce type de commande est motivé par les variations des masses du porte-échantillon du système. Toutefois, nous n'avons aucun contrôle sur la structure du correcteur ce qui nous amène aussi à l'utilisation de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée. Pour chacun des trois correcteurs, on présente les résultats obtenus pour une entrée *Transient* à 10 Hz. Par expérience, ce signal est le plus difficile à contrôler.

On finit dans la troisième partie par une analyse des performances atteintes par chacun des contrôleurs. On y présente les fréquences limites pour lesquelles on n'arrive plus à poursuivre le signal de référence. On y présente également les résultats de l'analyse de la robustesse des performances par l'intermédiaire des applications gardiennes et de la  $\mu$ -analyse.

### 5.1 Rappels théoriques

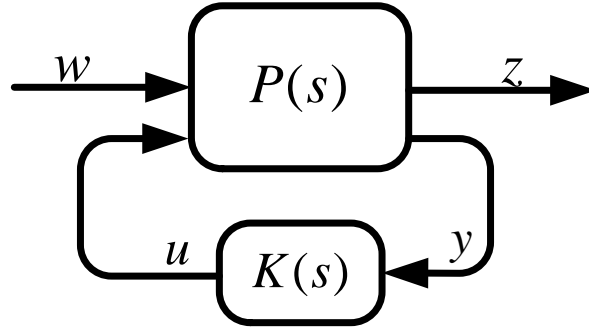
#### 5.1.1 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$

##### ◆ Présentation du problème $\mathcal{H}_\infty$ standard

La norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une fonction de transfert  $G(s)$  stable est :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \quad (5.1)$$

La synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  permet de concevoir des contrôleur à des fins de stabilisation et de réjection de perturbations. Le schéma correspondant au problème standard est le suivant (Alazard *et al.*, 1999, chap. 4) :

Figure 5.1 Problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard

Le système augmenté  $P(s)$  inclut les fonctions de pondération et modélise les transferts entre les entrées  $w$  et  $u$  et les sorties  $z$  et  $y$  :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

où :

- $w$  représente les entrées exogènes : signaux de référence, bruits, perturbations ;
- $u$  représente les commandes du système ;
- $z$  représente les signaux régulés ;
- $y$  représente les signaux mesurés.

Si on reboucle le système à l'aide de la loi de commande  $u = K(s)y$ , alors la matrice de transfert entre les signaux d'entrée  $w$  et les signaux de sortie  $z$  est donnée par (Transformation Fractionnaire Linéaire (LFT<sup>1</sup>) inférieure) :

$$T_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \quad (5.3)$$

Cette représentation permet la formulation mathématique du problème  $\mathcal{H}_\infty$  de la façon suivante (Alazard *et al.*, 1999, p.100), (Zhou et Doyle, 1998, p.269-270) :

• **Problème  $\mathcal{H}_\infty$  Optimal :**

*Minimiser  $\|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_\infty$  sur l'ensemble des compensateurs qui stabilisent le système de manière interne.*

---

1. **Linear Fractional Transformation**



Le minimum est appelé  $\gamma_{opt}$ . Il est cependant moins difficile de résoudre la version sous-optimale correspondante :

- **Problème  $\mathcal{H}_\infty$  Sous-Optimal :**

*Étant donné  $\gamma > 0$ , trouver un correcteur  $K(s)$  internement stabilisant tel que  $\|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$ .*

♦ **Résolution du problème  $\mathcal{H}_\infty$**

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre le problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard. L'approche proposée par (Doyle *et al.*, 1989), qui est basée sur les variables d'état, est la méthode la plus utilisée et la mieux adaptée au calcul numérique. Les hypothèses utilisées et les détails des étapes de résolution du problème sont présentés dans (Alazard *et al.*, 1999, §4.2) et (Zhou et Doyle, 1998, chap. 14).

Nous utilisons la fonction `hinfsv` de la **Robust Control Toolbox™** de **Matlab®** pour la synthèse du contrôleur (MathWorks®, 2012a). On passe à cette fonction comme arguments le système augmenté  $P(s)$  (incluant les fonctions de pondération), les dimensions de  $y$  et  $u$  puis elle retourne le contrôleur synthétisé  $K(s)$  et la fonction de transfert en boucle fermée  $T_{zw}(s)$  ainsi que le  $\gamma_{opt}$  trouvé. L'exemple 5.1 ci-après illustre son utilisation.

♦ **Choix des fonctions de pondération**

Une étape essentielle dans la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est le choix des filtres de pondération ainsi que la structure générale de synthèse. Il n'existe pas de méthodes systématiques pour faire ce choix mais on trouve certaines directives en littérature qui fournissent des points de départ selon la nature du problème à résoudre (Zhou et Doyle, 1998, §6.3), (Alazard *et al.*, 1999, §4.3.2) et (Duc et Font, 1999, §2.5.3).

Dans notre projet, nous avons adopté le schéma de synthèse suivant :

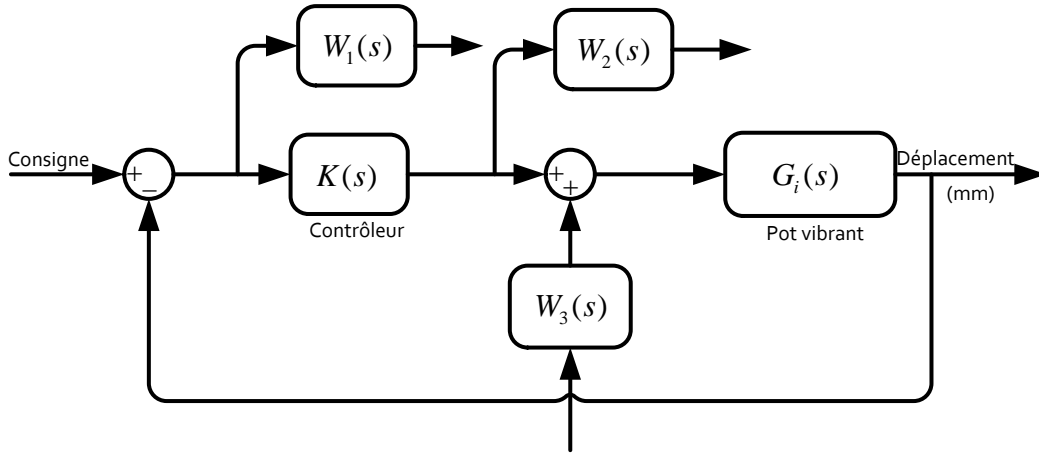


Figure 5.2 Schéma de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$

Cette structure nous permet de pondérer les différents transferts  $S$ ,  $KS$ ,  $SG_i$  et  $KSG_i$  à travers les fonctions  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$ . Le problème  $\mathcal{H}_\infty$  qui en découle est de trouver un  $\gamma$  positif et un correcteur  $K(s)$  qui stabilise le système en boucle fermée tout en respectant les 4 conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \|W_1 S\|_\infty &< \gamma \\
 \|W_2 K S\|_\infty &< \gamma \\
 \|W_1 W_3 S G_i\|_\infty &< \gamma \\
 \|W_2 W_3 K S G_i\|_\infty &< \gamma
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Où :

- $S(s)$ <sup>2</sup> est la fonction de sensibilité, i.e. le transfert entre la consigne et l'erreur ;
- $W_1(s)$  représente la fonction de pondération sur l'erreur de poursuite ;
- $W_2(s)$  représente la fonction de pondération sur l'effort de commande ;
- $W_3(s)$  représente la fonction de pondération sur la perturbation à l'entrée du pot vibrant et le bruit de la commande ;
- $G_i(s)$  représente la fonction de transfert du pot vibrant.

---

2. Son expression est :  $S(s) = \frac{1}{1 + K(s)G_i(s)}$

L'étape suivante est la sélection des fonctions de pondération. C'est une étape qui comporte plusieurs itérations et réglages avant de trouver les bonnes valeurs. Par exemple, les signaux de référence sont généralement aux basses fréquences alors que le bruit et les dynamiques négligées apparaissent aux hautes fréquences. On peut dans ce cas chercher une fonction de sensibilité  $S(s)$  faible en basses fréquences et une fonction de sensibilité complémentaire  $T(s)$ <sup>3</sup> faible en hautes fréquences et ainsi de suite (Bibel et Malyevac, 1992).

**Exemple 5.1** (*Problème de sensibilité mixte (Alazard et al., 1999)*)

On définit d'abord le système nominal et les fonctions de pondération. Ensuite, le système augmenté est bâti via la commande `augw`. On passe ensuite ce modèle augmenté comme argument à la fonction `hinfosyn` qui retourne le contrôleur synthétisé  $K$ , le système en boucle fermée  $CL$  et le seuil  $\gamma_{opt}$  final. D'autres arguments peuvent être ajoutés comme le nombre de mesures, la tolérance, etc.

Le code suivant illustre cette procédure pour le problème de sensibilité mixte. On peut aussi choisir d'autre signaux à pondérer comme le bruit à l'entrée du système, la consigne, etc.

```
% Exemple Matlab de d'utilisation de hinfosyn
G = ... % le systeme nominal
W1 = ... % Ponderation sur l'erreur
W2 = ... % Ponderation sur l'effort de commande
W3 = ... % Ponderation sur la sortie

P=augw(G,W1,W2,W3);
[K,CL,GAM]=hinfosyn(P);
```

### 5.1.2 Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée

L'inconvénient majeur de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est l'ordre du contrôleur qui est le même que celui du système augmenté (système + pondérations). En général, le contrôleur doit être réduit pour pouvoir l'implanter. Pour ce faire, des méthodes de réduction ont été développées et sont présentées dans (Zhou et Doyle, 1998, chap. 15).

Une alternative est d'utiliser la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée, présentée dans (Apkarian et Noll, 2006), qui permet d'avoir directement un contrôleur d'ordre réduit. L'avantage de cette méthode est qu'on peut choisir la structure du contrôleur qu'on souhaite concevoir. On peut également fixer certains paramètres et laisser d'autres libres.

La forme standard pour la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée est celle de la figure 5.3.  $P(s)$  contient le

---

3.  $T(s)$  est la fonction de transfert entre la sortie et la référence.

modèle du système et tous les paramètres fixes de la partie contrôle et le contrôleur structuré  $C(s)$  contient tous les paramètres à ajuster.

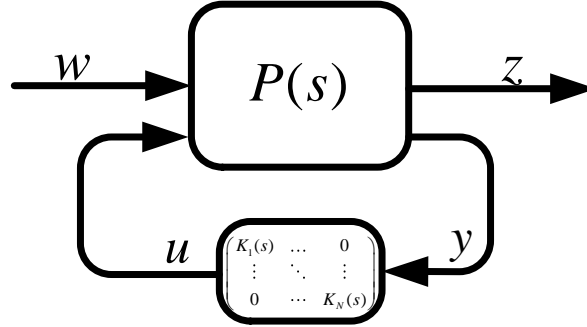


Figure 5.3 Schéma de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée

Le problème  $\mathcal{H}_\infty$  structuré revient à trouver les paramètres libres du correcteur  $K(s) := \text{Diag}(K_1(s), \dots, K_N(s))$  qui stabilisent le système en boucle fermée de manière interne et assure que  $\|H(s) = \mathcal{F}_l(P(s), \text{Diag}(K(s), \dots, K(s)))\|_\infty < 1$  (Gahinet et Apkarian, 2011).

La résolution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  structuré fait appel aux techniques d'optimisation non-lisse (Apkarian et Noll, 2006, 2007).

L'algorithme de résolution est implanté dans la fonction `hinfstruct` du **Robust Control Toolbox™** de **Matlab®**. On fixe la structure du contrôleur en utilisant des modèles de correcteur prédéfinis ou en choisissant manuellement les paramètres fixes et ajustables. On peut également synthétiser un contrôleur pour plusieurs modèles. L'article (Gahinet et Apkarian, 2011) présente la manière d'utiliser cette fonction sous **Matlab®** à l'aide d'un exemple sur un avion supersonique. Plusieurs autres exemples d'utilisation se trouvent également dans (Apkarian, 2013).

### Exemple 5.2 (*Utilisation de la fonction `hinfstruct`*)

Dans l'ensemble, son utilisation est similaire à `hinfsyn`. La différence majeure est qu'on peut choisir la structure et les paramètres à ajuster dans le contrôleur. On peut spécifier le paramètre à ajuster et laisser d'autres paramètres fixes.

```
a = realp('a',10); % a est initialise a 10
F = tf(a,[1 5 a]); % donne a/(s^2+5s+a) : le parametre ajustable est 'a'
```

On trouve également des fonctions prédéfinies comme :

```
C1 = ltiblock.tf('C1',2,3) % 2 zeros , 3 poles
C2 = ltiblock.pid('C2','pid'); % PID
C3 = ltiblock.pid('C3','pi'); % PI
```

Le code suivant présente une manière d'utiliser `hinfstruct`

```
G = tf([1 2],[1 5 10]); % modele
C = ltiblock.pid('C','pid'); % PID
S = feedback(1,G*C);
T = feedback(G*C,1);
H0 = blkdiag(wS * S, wT * T); % wS et wT des fonctions de ponderation
H = hinfstruct(H0);
H.Blocks.C % affiche les gains du controleur
```

Du fait du caractère local de l'optimisation, on peut effectuer plusieurs synthèses à partir de valeurs choisies aléatoirement. Pour cela, on ajoute en option multiples points de départ pour avoir de meilleures solutions comme suit :

```
op = hinfstructOptions('RandomStart',2),
H = hinfstruct(H0,op);
```

### 5.1.3 Applications gardiennes

Les applications gardiennes représentent un outil pour l'étude de la stabilité généralisée de familles de matrices et de polynômes ; elles ont été développées par (Saydy *et al.*, 1990). Les applications gardiennes sont définies par rapport à un domaine  $\Omega$  du plan complexe où les valeurs propres des matrices ou les racines des polynômes doivent être confinées.

Notons tout d'abord l'ensemble de stabilité généralisée  $\mathcal{S}(\Omega)$  :

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \sigma(A) \subset \Omega\} \quad (5.5)$$

**Définition 5.1.1** (Saydy *et al.*, 1990) Soit  $\mathcal{X}$  l'ensemble des matrices carrées réelles de dimension  $n$  et  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathcal{X}$ . Soit  $\nu$  une application de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $\nu$  garde  $\mathcal{S}$  si pour tout  $x \in \overline{\mathcal{S}}$ , on a :

$$\nu(x) = 0 \iff x \in \partial\mathcal{S} \quad (5.6)$$

On appelle alors  $\nu$  une *application gardienne* pour  $\mathcal{S}$ .

Quelques applications gardiennes usuelles sont présentées dans la figure 5.4. On distingue :

- La stabilité **Hurwitz** qui consiste à placer les pôles dans le demi-plan gauche. Ce domaine est gardé par l'application gardienne suivante :

$$\nu_H(A) = \det(A \odot I) \det(A) \quad (5.7)$$

où  $\odot$  désigne le produit bialterné (voir (Stéphanos, 1900) pour plus de détails).

- La **marge de stabilité** par rapport à l'axe imaginaire. Elle est utile afin de garantir une performance sur le temps de réponse du système bouclé. Elle est gardée par :

$$\nu_\alpha(A) = \det(A - \alpha I) \det((A - \alpha I) \odot I) \quad (5.8)$$

- La stabilité par rapport à l'**amortissement**  $\zeta$ . On peut dans certains cas chercher un amortissement minimum en boucle fermée. Pour ce faire, on confine les pôles du système en boucle fermée dans le cône d'angle  $2\theta$  avec  $\zeta = \cos(\theta)$ . L'application gardienne correspondante est donnée par :

$$\nu_\zeta(A) = \det(A) \det(A^2 \odot I + (1 - 2\zeta^2)A \odot A) \quad (5.9)$$

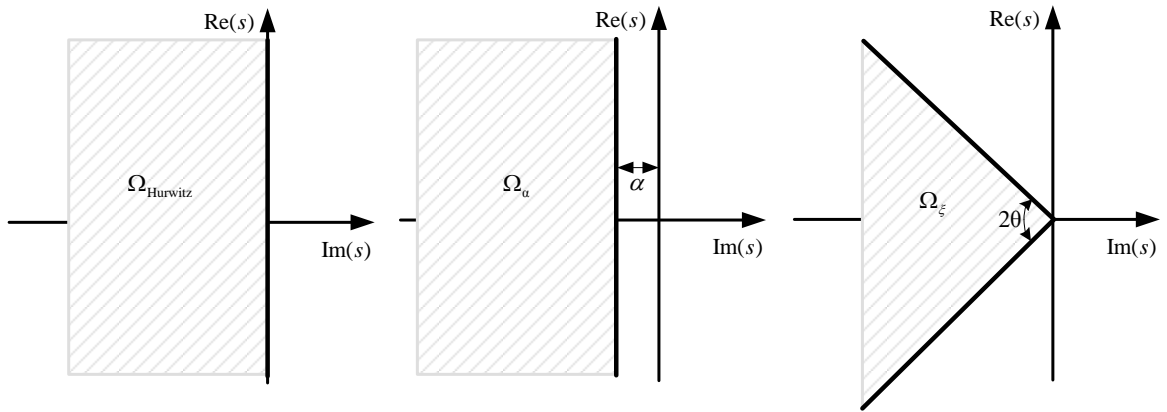


Figure 5.4 Exemples d'applications gardiennes usuelles

La procédure pour la construction d'une application gardienne en générale est donnée dans (Saydy *et al.*, 1990). Dans le cadre de notre étude, nous utilisons les résultats ci-haut pour la construction des lieux désirés afin d'assurer les performances souhaitées en boucle fermée. Par exemple, le domaine  $\Omega$  à garder de la figure 5.5 est obtenue en multipliant les

applications gardiennes 5.8 et 5.9.

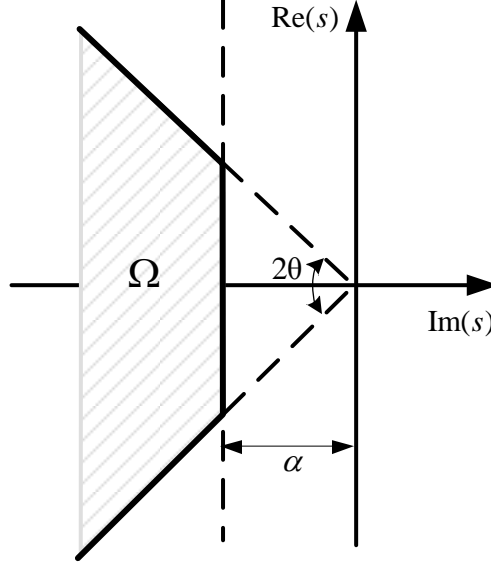


Figure 5.5 Exemple de domaine  $\Omega$  à garder

#### ◆ Stabilité robuste

Soit  $\{A(r) : r \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^k\}$  une famille continue qui dépend du paramètre  $r$  pour lequel on connaît uniquement les bornes. Le théorème de la stabilité robuste est le suivant :

**Théorème 5.1.1** (Saydy *et al.*, 1990) *L'ensemble  $\mathcal{S}(\Omega)$  est gardé par  $\nu_\Omega$ . La famille  $\{A(r) : r \in \mathbb{U}\}$  est  $\Omega$ -stable (stable relativement à  $\Omega$ ) si et seulement si elle est nominalement stable et  $\nu_\Omega(A(r)) \neq 0$  pour tout  $r \in \mathbb{U}$ .*

Le résultat qui nous intéresse dans le cadre de ce projet concerne les familles uniparamétriques. Supposons que :

$$A(r) = A_0 + rA_1 + r^2A_2 + \cdots + r^kA_k$$

À partir d'un point  $r_0$  pour lequel la matrice  $A(r_0)$  est  $\Omega$ -stable, on cherche à trouver l'intervalle le plus grand pour  $r$  où  $A(r)$  demeure stable. La définition suivante donne les

limites maximales de cet intervalle :

$$r^- = \sup\{r < r_0 : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \quad (\text{ou } -\infty \text{ sinon})$$

$$r^+ = \inf\{r > r_0 : \nu_\Omega(A(r)) = 0\} \quad (\text{ou } +\infty \text{ sinon})$$

**Lemme 5.1.1** (Saydy et al., 1990) Soit  $A(r) = A_0 + rA_1 + r^2A_2 + \dots + r^kA_k$  une famille de matrices qui dépend du paramètre réel incertain  $r$  avec  $A_i$  des matrices constantes et telle que  $A(r_0)$  soit  $\Omega$ -stable. Soit  $\nu_\Omega$  une application gardienne pour  $\mathcal{S}(\Omega)$ . Alors,  $A(r)$  est stable par rapport à  $\Omega$  pour tout  $r \in (r^-, r^+)$ . C'est même le plus grand intervalle contenant  $r_0$ .

**Exemple 5.3** (Commande en position d'un volant d'inertie)

Dans cet exemple, on étudie la stabilité Hurwitz lorsque le paramètre  $K_e$  varie dans la matrice compagne suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-7K_e}{0.04(K_e + 25)} & \frac{-K_e}{0.004(K_e + 25)} & \frac{-K_e}{0.01(K_e + 25)} \end{bmatrix}$$

L'application gardienne utilisée est celle donnée par l'équation 5.7. Le code utilisé est le suivant :

```
syms Ke
K1 = 0.35
den1 = Ke+25;
A1 = [0 1 0;
      0 0 1;
      -7*Ke/(0.04*den1) -Ke/(0.004*den1) -Ke/(0.01*den1)]

nu = det(A1)*det(bialtprod(A1,eye(3)))
ezplot(nu)
grid
axis([0 0.5 -0.2 0.2])
```



L'intervale obtenu est présenté dans la figure suivante :

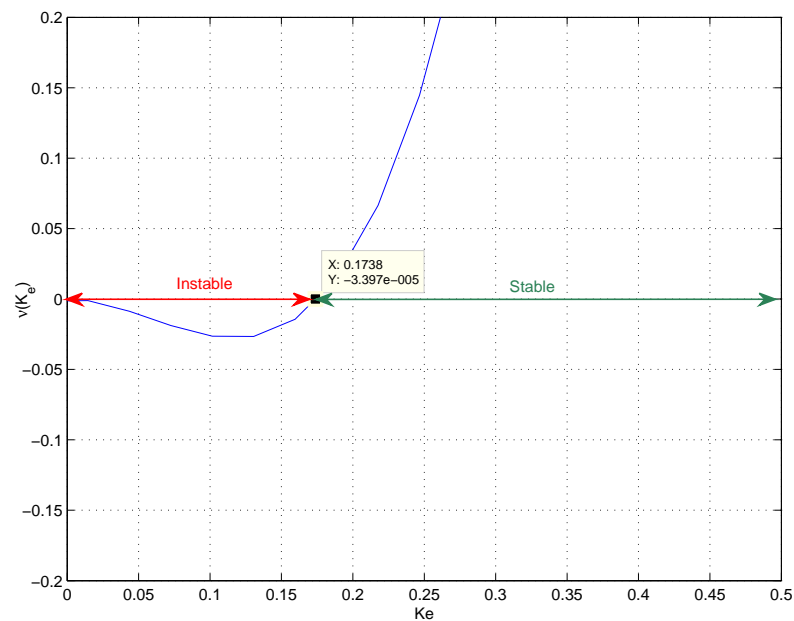


Figure 5.6 Exemple de résultats des applications gardiennes

#### 5.1.4 $\mu$ -analyse

Afin d'étudier la stabilité des lois de commande développées dans ce chapitre, nous allons aussi utiliser l'approche de la valeur singulière structurée (VSS) ou la  $\mu$ -analyse. C'est une méthode qui permet de quantifier la robustesse d'une structure de contrôle ; en l'occurrence la marge de stabilité du système, lorsque le modèle étudié est incertain.

Le schéma d'interconnexion standard pour la  $\mu$ -analyse est le suivant :

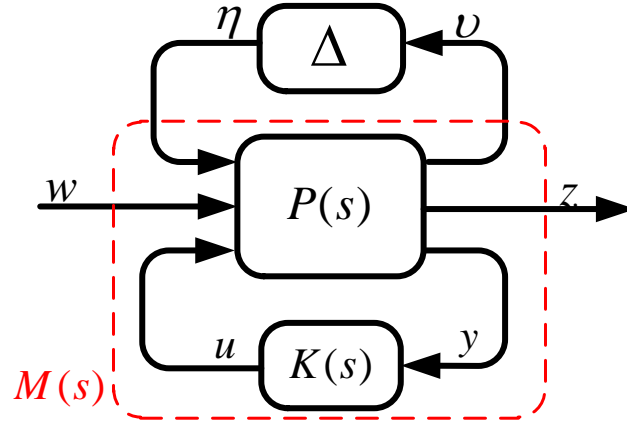


Figure 5.7 Schéma standard pour la  $\mu$ -analyse

La matrice  $M(s)$  contient les éléments de la boucle fermée nominale alors que la matrice  $\Delta$  rassemble les incertitudes du modèle. On distingue deux types d'incertitudes :

- les incertitudes non-structurées, telles que par exemple, certaines dynamiques négligées en modélisation<sup>4</sup> (Alazard *et al.*, 1999, §5.2) et (Zhou et Doyle, 1998, §8.1) ;
- les incertitudes structurées, qui incluent les incertitudes paramétriques dues aux variations d'un ou plusieurs paramètres physiques du modèle. Par exemple, la variation de la masse du porte-échantillon est considérée comme une incertitude paramétrique variant dans un intervalle connu.

Le calcul de la marge de stabilité se ramène alors à chercher la plus petite perturbation  $\Delta$  qui déstabilise le système.

Dans le cas non-structuré, le théorème du petit gain permet de déterminer le critère de stabilité robuste.

**Théorème 5.1.2** (Théorème du petit gain) (Zhou et Doyle, 1998, §8.2) *Si  $M(s)$  et  $\Delta(s)$  sont stables, le système à la figure 5.7 est stable pour tout  $\Delta(s)$  tel que  $\|\Delta(s)\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$  si et seulement si  $\|M(s)\|_\infty \leq \gamma$ .*

Dans le cas structuré, on utilise la valeur singulière structurée définie par (Zhou et Doyle, 1998, §10.2) :

$$\mu_{\underline{\Delta}} := \frac{1}{\min\{\|\bar{\sigma}(\Delta)\| : \Delta \in \underline{\Delta}, \det(I - M\Delta) = 0\}} \quad (5.10)$$

4. Par exemple : négliger la dynamique des capteurs ou des actionneurs, les erreurs de modélisation à hautes fréquences ou bien négliger la constante de temps électrique devant la constante de temps mécanique...

où  $\underline{\Delta}$  est l'ensemble des matrices complexes et réelles ayant la même structure que la perturbation  $\Delta$ .

À partir de cette définition, on obtient le théorème décrivant le principe de la  $\mu$ -analyse :

**Théorème 5.1.3** (Critère de stabilité robuste) (Zhou et Doyle, 1998, §10.2) *Le système de la figure 5.7 est stable pour toute incertitude  $\Delta \in \underline{\Delta}$ ;  $\|\Delta\|_\infty < 1$  si et seulement si :*

$$\sup_{\omega} [\mu_{\underline{\Delta}}(M_{11}(j\omega))] \leq 1$$

La marge de stabilité est égale à  $\frac{1}{\alpha_{max}}$  où  $\alpha_{max}$  est la valeur maximale de  $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$ . En d'autres termes, la stabilité est assurée pour toutes variations  $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\alpha_{max}}$ .

Lorsque l'on s'intéresse à étudier la performance robuste suivant un gabarit fréquentiel choisi, le résultat de la valeur singulière structurée peut être utilisé en augmentant le bloc  $\Delta$  contenant les incertitudes structurées du système par un bloc  $\Delta_f$  dit « *full* ». Le problème de performance robuste revient donc à un problème de stabilité robuste avec un bloc d'incertitude augmenté.

**Théorème 5.1.4** (Critère de performance robuste) (Zhou et Doyle, 1998, §10.3.2) *Le système de la figure 5.7 est stable et performant pour toute incertitude  $\Delta \in \underline{\Delta}$ ;  $\|\Delta\|_\infty < 1$  si et seulement si :*

$$\sup_{\omega} [\mu_{\Delta_P}(M(j\omega))] \leq 1$$

$$\text{où : } \Delta_P = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_f \end{bmatrix} : \Delta \in \underline{\Delta} \text{ et } \Delta_f \in \mathbb{C} \right\}$$

#### ◆ Calcul de la VSS :

Le calcul de la valeur exacte de  $\mu_{\Delta}$  est un problème d'optimisation complexe ce qui amène, parfois, à ne disposer que de bornes supérieure et inférieure au lieu d'une valeur exacte de  $\mu_{\Delta}$ . On utilise dans notre cas l'outil  `$\mu$ -analysis and synthesis toolbox` de Matlab<sup>®</sup> (MathWorks<sup>®</sup>, 2012a). En voici un exemple d'utilisation :

#### Exemple 5.4 (Calcul de la VSS)

L'exemple suivant est tiré de (Duc et Font, 1999, § 4.9). On étudie la stabilité robuste du système en boucle fermée d'un moteur. On suppose deux types d'incertitude ; des incertitudes paramétriques et une dynamique négligée qui correspond à la constante de temps électrique.

On extrait tout d'abord les transferts entre les entrées et les sorties du bloc  $\Delta$ . Ensuite, un maillage fréquentiel est réalisé à l'aide de la fonction `logspace(i,j,m)`. On obtient  $m$  fréquences entre la fréquence minimale  $10^i$  et la fréquence maximale  $10^j$ . Ensuite, on calcule la réponse en fréquence du système via la fonction `frd`. On spécifie ensuite la structure du bloc d'incertitude : les deux premières incertitudes sont réelles alors que la troisième incertitude est complexe. Enfin, on passe la réponse en fréquence du système et la structure de l'incertitude à la fonction `mussv` qui retourne les bornes supérieure et inférieures de la VSS.

Le code suivant illustre les étapes décrites ci-haut :

```
%Exemple Matlab de calcul de la valeur structuree singuliere
[A,B,C,D]=linmod('modele_du_systeme');
syst = ss(A,B,C,D);
om = logspace(1,4,100);
Mg = frd(syst,om);
deltaset = [-1 0;-1 0;1 0];
[bounds,muinfo] = mussv(Mg,deltaset);
freq = bounds(1).Frequency;
mu_high = bounds(1).ResponseData(:);
mu_low = bounds(2).ResponseData(:);

figure
semilogx(freq,mu_high,freq,mu_low);
grid
xlabel('pulsation_(rad/s)')
title('bornes_superieure_et_inferieure_de_mu')
legend('Borne_superieure','Borne_inferieure')
```

Le schéma Simulink<sup>®</sup> utilisé dans cet exemple est celui de la figure 5.8. Le résultat obtenu est présenté à la figure 5.9. On remarque que le maximum de la borne supérieure vaut 0.401. On peut en déduire que la stabilité est garantie pour tout  $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{0.401} = 2.49$ .

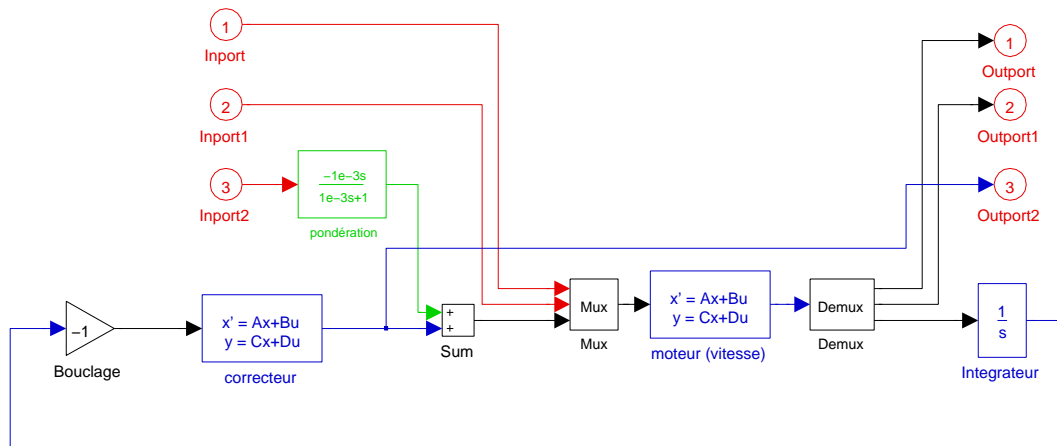


Figure 5.8 Schéma Simulink<sup>®</sup> de l'exemple 5.4, tiré de (Duc et Font, 1999)

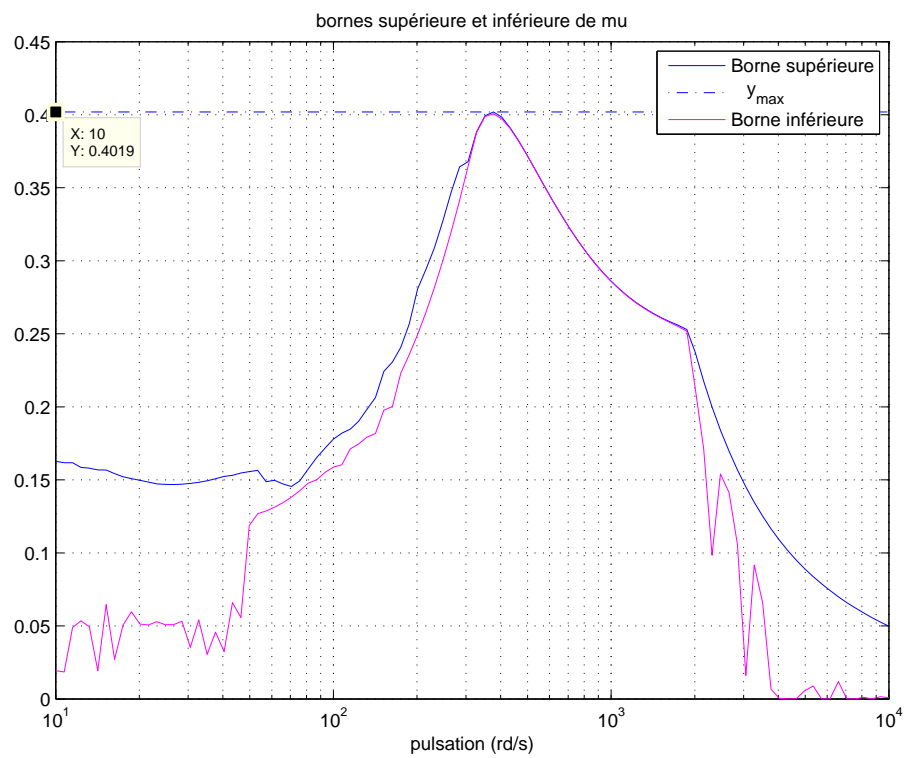


Figure 5.9 Résultat de l'exemple 5.4, tiré de (Duc et Font, 1999)

## 5.2 Contrôle du pot vibrant #1

On présente dans cette section le comportement du système en boucle ouverte, du pot vibrant #1, à l'aide du digramme de Bode et du lieu des pôles et des zéros pour toutes masses utilisées. On expose ensuite les étapes suivies pour la synthèse des trois lois de commande : retard de phase,  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mathcal{H}$  structurée. Pour chaque contrôleur, on présente la réponse du système en boucle fermée pour une entrée *Transient* à 10 Hz. Les mêmes étapes sont présentées dans le cas du pot vibrant #3 à la section suivante.

### 5.2.1 Comportement du système en boucle ouverte

L'évolution des pôles en fonction de la masse du modèle du pot vibrant #1 montre la diminution du coefficient d'amortissement lorsque la masse du porte-échantillon augmente (figure 5.10a). Ceci explique l'augmentation de l'amplitude des oscillations dans la réponse temporelle lorsque l'on augmente le poids du porte-échantillon.

Dans le diagramme de Bode de la figure 5.10b, on constate que le système présente un gain presque unitaire en bas de 100 rad/s et sa bande passante diminue lorsque la masse augmente.

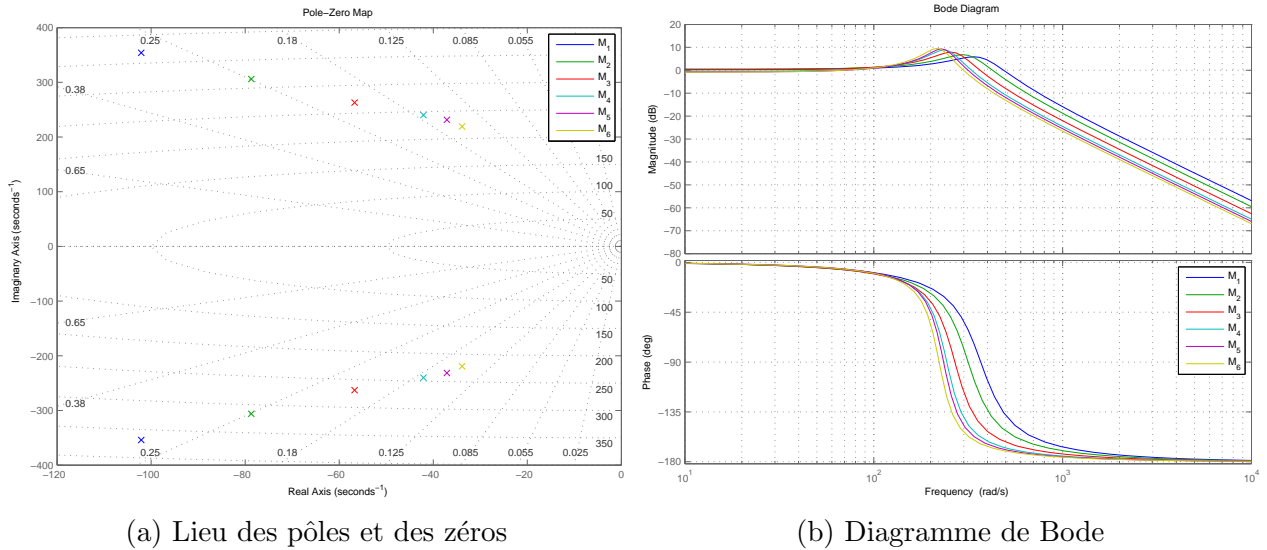


Figure 5.10 Caractéristiques en boucle ouverte du pot vibrant #1

### 5.2.2 Contrôleur à retard de phase

L'étape suivante est la conception d'une loi de commande qui assure la poursuite des trois signaux d'entrée à différentes fréquences et pour toutes les masses des porte-échantillons.

Cependant, on recherche normalement à assurer la poursuite de la consigne en régime permanent. Différentes techniques de synthèse ont été développées en ce sens pour établir une idée générale sur la structure que doit posséder le contrôleur. Par exemple, pour avoir une erreur statique nulle en régime permanent pour une entrée échelon, le correcteur doit contenir dans sa formule un intégrateur  $\left(\frac{1}{s}\right)$ . Si l'entrée est une sinusoïde de fréquence  $\omega_0$ , le terme  $\frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2}$  doit apparaître dans le correcteur (Kazerooni, 1990).

Dans d'autres cas, on cherche à atteindre un temps de réponse spécifique ou bien placer les pôles en boucle fermée dans une région particulière.

Or, dans notre cas, la poursuite doit être satisfaite au niveau transitoire pour des signaux d'entrée originaux : *Transient*, *Blackman* et *Multi-Blackman* à différentes fréquences et amplitudes. Il est donc important de traduire ces contraintes en termes de performances désirées afin de concevoir le contrôleur approprié.

Nous avons essayé de trouver un système du deuxième ordre en boucle ouverte qui reproduit le signal *Transient* de référence. Nous avons modifié les paramètres d'amortissement  $\zeta$  et de la fréquence naturelle  $\omega_n$  afin de trouver leurs valeurs minimales qui vont nous permettre de reproduire le signal. La zone de placement des pôles sera délimitée par ces deux valeurs comme le montre la figure 5.11.

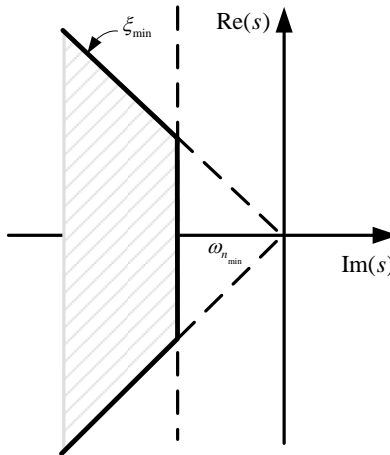


Figure 5.11 Zone de placement des pôles

Nous avons constaté que la modification de la fréquence naturelle avait un effet direct sur l'allure du signal de sortie. Nous pouvons expliquer cela par la nécessité d'apporter de la rapidité au système en boucle fermée afin de suivre les transitions rapides dans le régime transitoire. La valeur minimale de  $\omega_n$  retenue est 800 rad/s.

Le premier contrôleur choisi est un correcteur à retard de phase (avec  $z > p$  dans la figure 5.12). Le diagramme fonctionnel de la stratégie de cette loi de contrôle est :

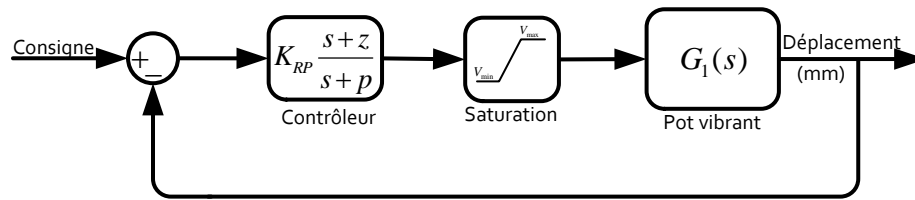


Figure 5.12 contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #3

Ce type de contrôleur diminue l'effet du bruit en hautes fréquences, réduit l'erreur statique en régime permanent, augmente le gain aux basses fréquences et améliore la stabilité du système<sup>5</sup>. En contrepartie, un tel contrôleur risque de dégrader les performances en régime transitoire. Pour remédier à cela, il faut placer  $z$  et  $p$  proches l'un de l'autre pour que leur effet soit négligeable sur le lieu des racines du système en boucle fermée (Dorf et Bishop, 2008, § 10.7).

Le choix des paramètres  $K_{RP}$ ,  $z$  et  $p$  est basé sur notre connaissance du système et suivant les étapes suivantes :

1. Fixer  $K_{RP}$  à 1.
2. Choisir  $z$  proche du module des pôles dominants du modèle du procédé.
3. Choisir  $p$  proche de la valeur de  $z$  choisis précédemment.
4. Simuler le système en boucle fermée pour les trois types d'entrée. Si la réponse est lente, augmenter  $K_{RP}$  et répéter les étapes 2 et 3.

Nous utilisons l'outil `RL-tool` de `Matlab`<sup>®</sup> afin de visualiser le lieu des pôles en boucle fermée tout en respectant la zone de placement définie auparavant. Le modèle nominal sur

---

5. Le tableau 7.2 de (Shinners, 1992, § 7.10) dresse les caractéristiques, les avantages et les inconvénients du contrôleur à retard de phase.



lequel nous travaillons est celui de la plus faible masse du porte-échantillon  $M_1 = 38.01$  g. Le contrôleur obtenu est :

$$C_{1RP}(s) = 10 \frac{(s + 325)}{(s + 300)} \quad (5.11)$$

On présente à la figure 5.13 le résultat de simulation du pot vibrant #1. On constate que le déplacement du système suit la consigne. Il présente, toutefois, une différence en amplitude qui n'affecte pas pour autant le profil fréquentiel du déplacement. Ce dernier demeure centré autour de 10 Hz. L'amplitude des oscillations qui apparaissent à la fin du signal de déplacement ainsi que l'effort de commande sont proportionnels à la masse des porte-échantillons.

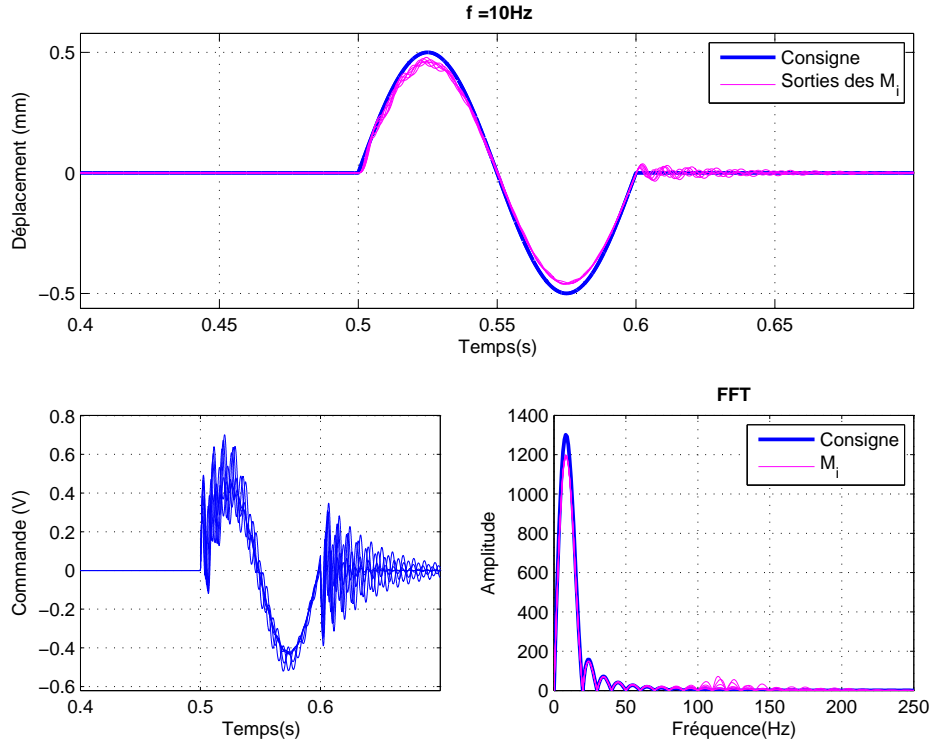


Figure 5.13 Contrôleur à retard de phase – Entrée *Transient* –  $f = 10$  Hz – pot vibrant #1

### 5.2.3 Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$

Comme nous l'avons déjà mentionné, la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  nécessite le choix de filtres de pondérations. Pour ce faire, nous avons suivi la procédure suivante pour les deux pots vibrants :

1. Le premier filtre à choisir est un filtre passe-bas  $W_1(s)$ . Sa fréquence de coupure est ajustée dans un premier temps à 100 Hz. On garde les deux autres fonctions de pondération très faibles pour que le calcul du correcteur tienne compte uniquement de la référence et ignore la perturbation et l'effort de commande.

2. Le système est simulé pour ce premier correcteur afin de valider les performances en poursuite.
3. Ensuite, on modifie la fonction de pondération  $W_2(s)$  pour limiter l'effort de commande et la sensibilité au bruit aux hautes fréquences.
4. On valide le nouveau compensateur en simulant à nouveau le système en boucle fermée. Si nécessaire, on modifie  $W_1(s)$  et  $W_2(s)$  en gardant la valeur de  $\gamma$  proche de 1.
5. Enfin, on augmente progressivement  $W_3(s)$  jusqu'à ce qu'un changement significatif apparaisse sur  $\gamma$ . Sa valeur ne devrait pas dépasser de trop la valeur 1.

Les fonctions de pondération retenues pour le pot vibrant #1 sont :

$$\begin{aligned}
 W_1(s) &= 0.5 \frac{s + 1257}{s + 6.283} \\
 W_2(s) &= 10 \frac{s + 3142}{s + 3.142 \times 10^6} \\
 W_3(s) &= 2
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

La figure 5.14 montre les diagrammes de Bode des 3 fonctions de transfert.  $W_1$  est un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure à 120 Hz,  $W_2$  limite les variations rapides de la commande et  $W_3$  est choisie constante pour atténuer les perturbations sur toute la plage fréquentielle. La valeur de  $\gamma_{opt}$  dans ce cas est 1.0135.

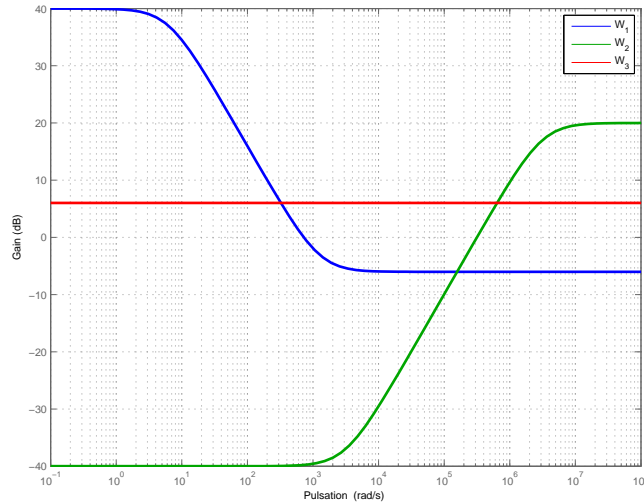
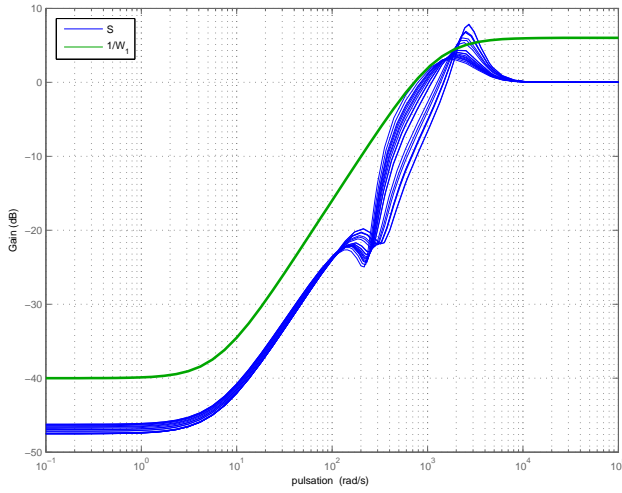


Figure 5.14 Fonctions de pondération – Pot vibrant #1

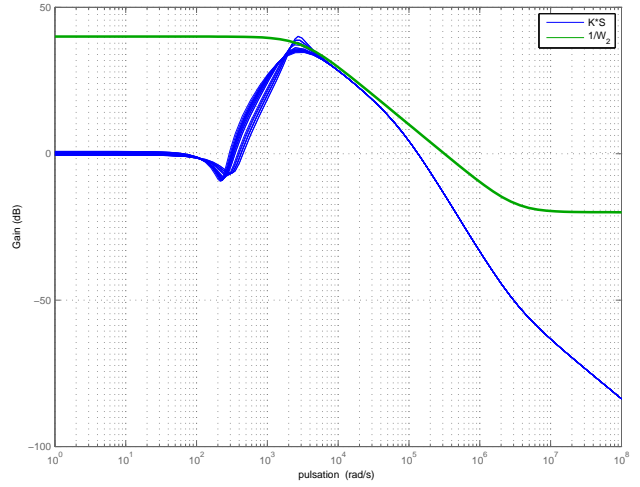
Le contrôleur ainsi synthétisé est un contrôleur d'ordre 4 :

$$C_{1\mathcal{H}_\infty}(s) = \frac{6523.04(s + 3.142 \times 10^6)(s^2 + 286.6s + 7.316 \times 10^4)}{(s + 7.399 \times 10^4)(s + 6.283)(s^2 + 6214s + 1.439 \times 10^7)} \quad (5.13)$$

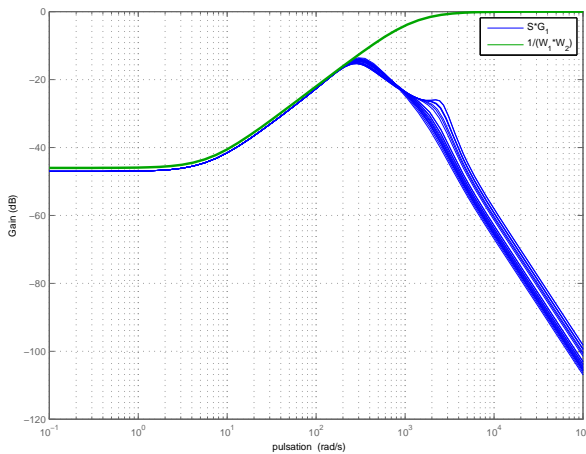
Ce contrôleur respecte les conditions 5.4 comme le montrent les diagrammes de Bode de la figure 5.15. On remarque que  $S$  et  $KS$  dépasse légèrement le gabarit fixé. Ce dépassement ne devrait pas être problématique vu qu'il survient à des fréquences supérieures aux fréquences utilisées pour le système. Les diagrammes de Bode sont réalisés pour 20 valeurs de  $M$  :



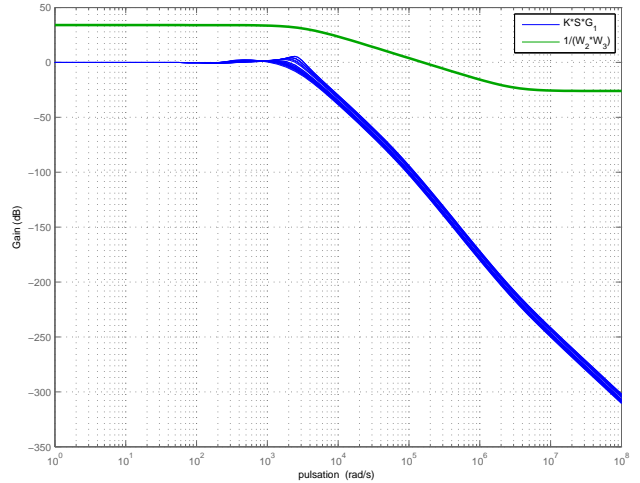
(a) Gabarit sur  $S$



(b) Gabarit sur  $KS$



(c) Gabarit sur  $SG_1$



(d) Gabarit sur  $KSG_1$

Figure 5.15 Validation des gabarits fréquentiels choisis – Pot vibrant #1

On présente à la figure 5.16 le résultat de simulation pour les 6 masses étudiées et le contrôleur assure la poursuite de la consigne. La commande varie rapidement au début et à la fin du signal de référence pour compenser le changement brusque dans la consigne mais elle est loin de la saturation. On remarque également des oscillations d'amplitudes négligeables à la fin de la période du signal d'entrée qui n'affectent en rien le gabarit fréquentiel désiré qui est centré autour de la fréquence d'entrée.

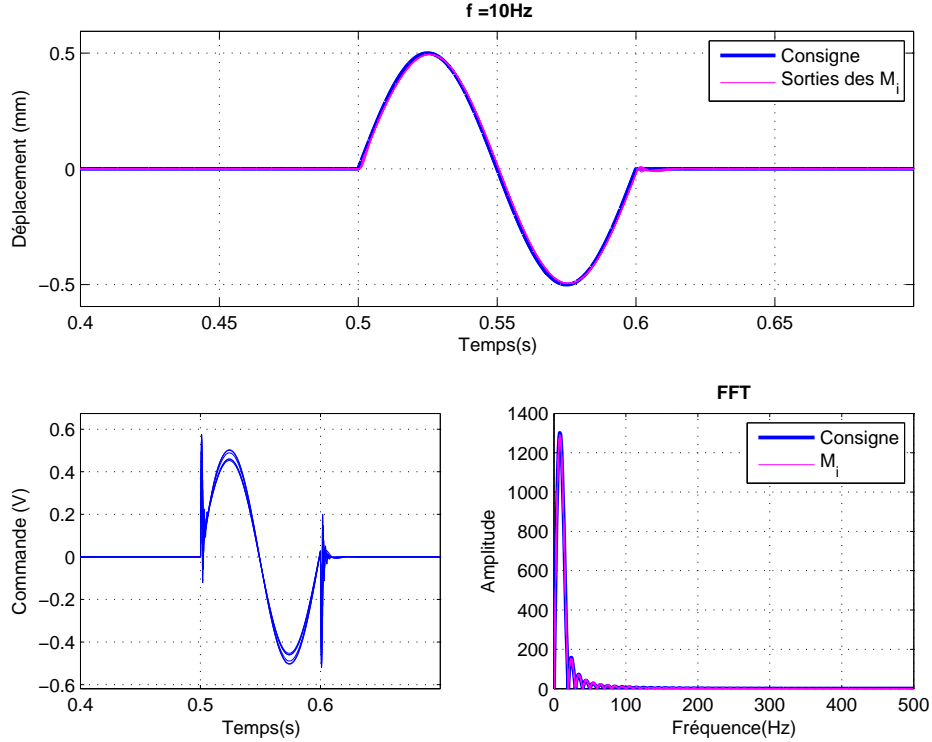


Figure 5.16 Contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  – Entrée *Transient* –  $f = 10$  Hz – Pot vibrant #1

#### 5.2.4 Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structuré

Pour le choix de la structure du correcteur, nous nous sommes basés sur le résultat de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  obtenu précédemment. Le contrôleur recherché est diminué à un ordre 3 qui est l'ordre le plus faible pour avoir de bonnes performances. Les mêmes fonctions de pondérations que dans l'équation 5.12 ont été utilisées. La fonction de transfert du contrôleur obtenu avec un  $\gamma_{opt} = 1.34$  est :

$$C_{1\mathcal{H}_\infty\text{struct}}(s) = \frac{39 \times 10^4 (s^2 + 207.4s + 4.985 \times 10^4)}{(s + 6.286)(s^2 + 6511s + 1.616 \times 10^7)} \quad (5.14)$$

La simulation du système en boucle fermée pour une entrée *Transient* de 10 Hz est illustrée à la figure 5.17.

La réponse obtenue est similaire à la réponse obtenue par le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$ . En effet, le déplacement résultant suit la consigne pour toutes les masses. De plus, la commande varie rapidement à  $t = 0.5\text{s}$  et à  $t = 0.6\text{s}$  pour compenser les changements rapides au début et à la fin de la période du signal de référence.

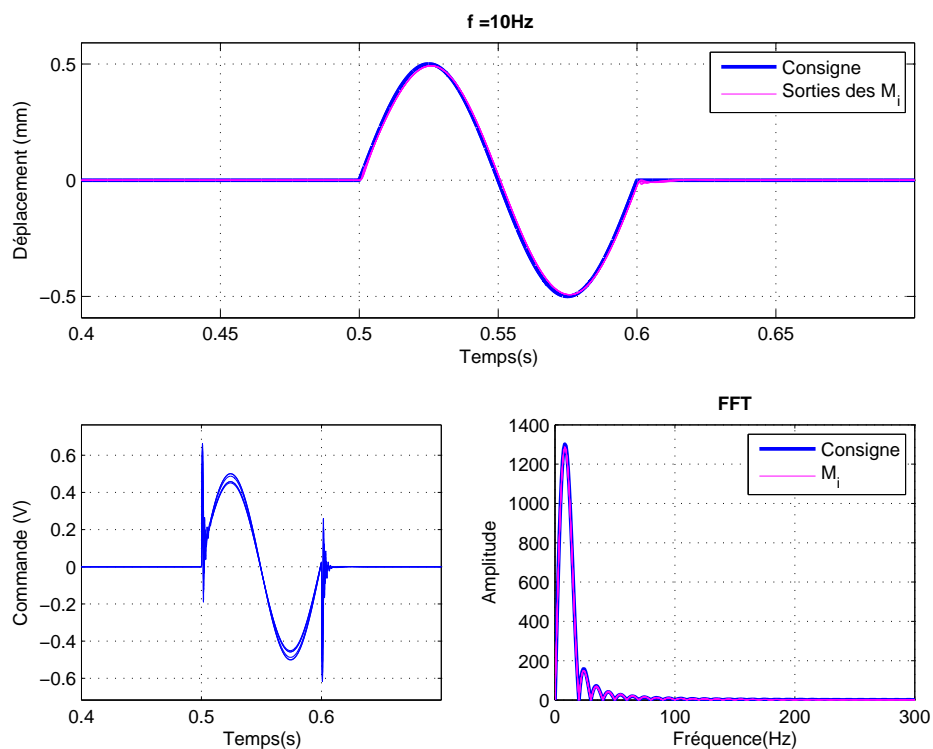


Figure 5.17 Contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structuré – Entrée *Transient* –  $f = 10\text{ Hz}$  – Pot vibrant #1

### 5.3 Contrôle du pot vibrant #3

#### 5.3.1 Comportement du système en boucle ouverte

Le lieu des pôles et des zéros du pot vibrant #3 à la figure 5.18a nous montre que les pôles dominants varient très peu en fonction de la masse du porte-échantillon et que le coefficient d'amortissement diminue lorsque la masse augmente.

Le diagramme de Bode du pot vibrant #3 nous montre que la réponse aux basses fréquences est similaire pour les 4 masses étudiées mais elle devient différente au delà de 400 rad/s (figure 5.18b). D'autre part, la bande passante du système diminue lorsque la masse du porte-échantillon augmente. Elle s'étale de 30 rad/s jusqu'à un maximum de 700 rad/s pour  $M_1$ .

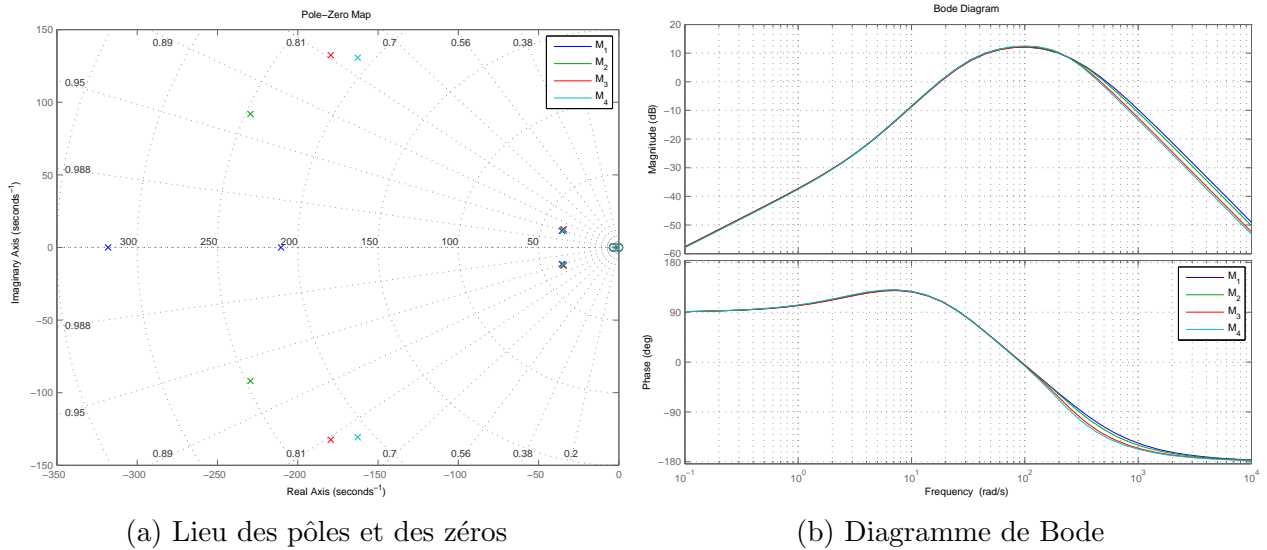


Figure 5.18 Caractéristiques en boucle ouverte du pot vibrant #3

#### 5.3.2 Contrôleur à retard de phase

Dans un premier temps, nous utilisons également pour la troisième source vibrante un contrôleur à retard de phase. La démarche adoptée pour trouver les gains est similaire à celle utilisée dans la section 5.2.2 (page 65). On désire placer les pôles du système nominal,  $M_1 = 62.4$  g, en boucle fermée dans la zone délimitée par  $\omega_n = 800$  rad/s. La valeur de  $\zeta$  à été fixée à 0.3.

Le contrôleur retenu est :

$$C_{3RP}(s) = 1.3 \frac{(s + 20)}{(s + 2)} \quad (5.15)$$

La réponse du système en boucle fermée pour les 4 masses est présentée à la figure 5.19. On constate que le contrôleur préserve l'allure du déplacement désiré en fréquence malgré la différence en amplitude dans la première demi-période entre les deux signaux. De plus, un dépassement est visible à la fin de la période accompagné de variations rapides dans le signal de commande à  $t = 0.6$  s. Ce dernier demeure loin des limites de saturation. D'autre part, le lobe principal du profil fréquentiel du déplacement mesuré est centré autour de la fréquence désiré avec un écart en amplitude par rapport à la consigne. Cet écart est dû à la différence en amplitude dans le signal temporel discutée plus tôt.

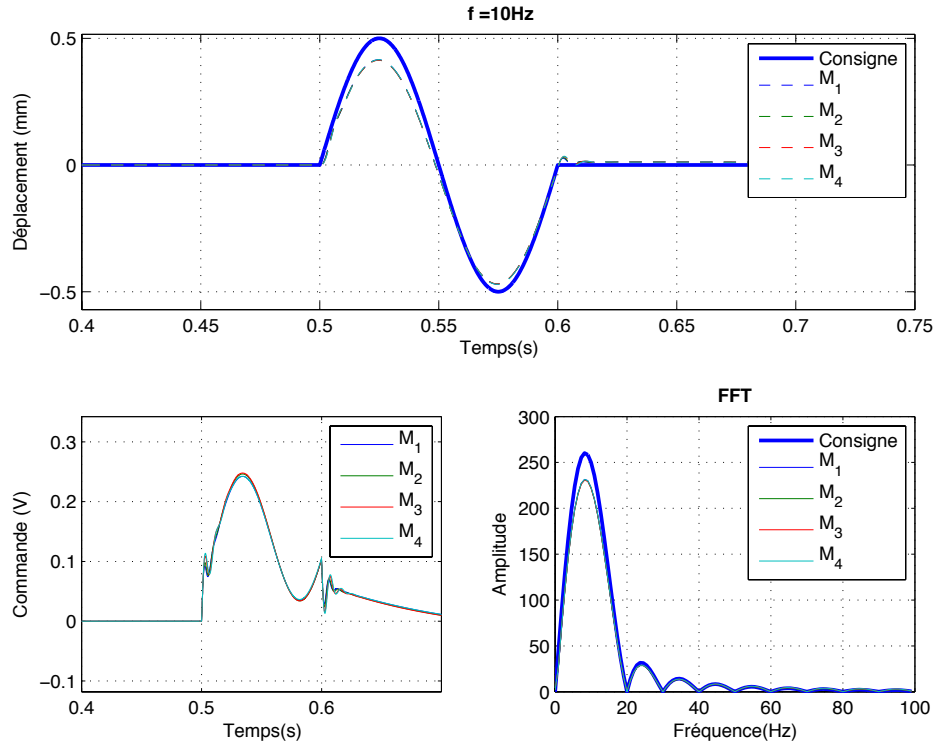


Figure 5.19 contrôleur à retard de phase – Entrée *Transient* –  $f = 10$  Hz – Pot vibrant #3

### 5.3.3 Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$

La différence dans les modèles des pots vibrants nous oblige à choisir de nouvelles fonctions de pondération pour la source vibrante #3. Cependant, la procédure adoptée est la même que celle décrite plus haut (§ 5.2.3, page 67).

Les filtres de pondération retenus sont :

$$\begin{aligned} W_1(s) &= 0.0005 \frac{s + 1.257 \times 10^4}{s + 6.283} \\ W_2(s) &= 0.1 \frac{s + 3142}{s + 3.142 \times 10^6} \\ W_3(s) &= 0.5 \end{aligned} \quad (5.16)$$

La figure 5.20 montre leurs diagrammes de Bode. On garde presque le même gabarit fréquentiel que pour le pot vibrant #1, cependant, les gains en basses fréquences ont été diminués parce que le pot vibrant #3 est relativement plus stable que le premier. Il est donc moins sensible aux variations rapides de la commande ou du bruit à son entrée. La valeur de  $\gamma_{opt}$  dans ce cas est 1.0056.

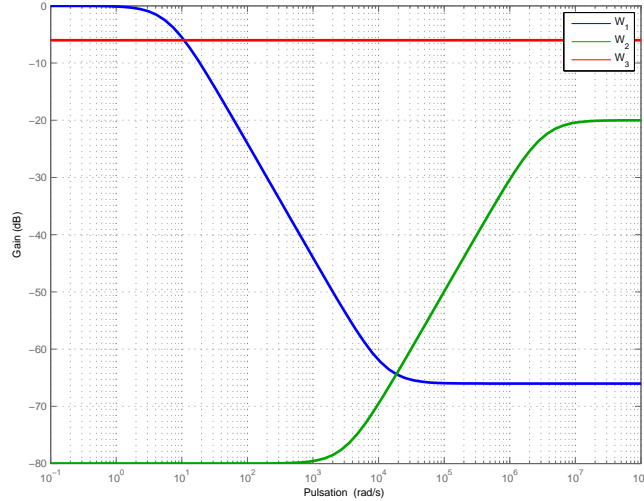


Figure 5.20 Fonctions de pondération – pot vibrant #3

Le contrôleur synthétisé est un contrôleur d'ordre 6. Sa fonction de transfert est :

$$C_{3H_\infty}(s) = \frac{71.627(s + 3.142 \times 10^6)(s^2 + 35.8s + 493.8)(s^2 + 707.9s + 1.626 \times 10^5)}{(s + 4967)(s + 11.07)(s + 6.283)(s + 3.451)(s^2 + 3741s + 1.432 \times 10^7)} \quad (5.17)$$

Les gabarits fréquentiels spécifiés pour la synthèse du correcteur  $C_{3H_\infty}(s)$  sont tous satisfaits comme le montre la figure 5.21.



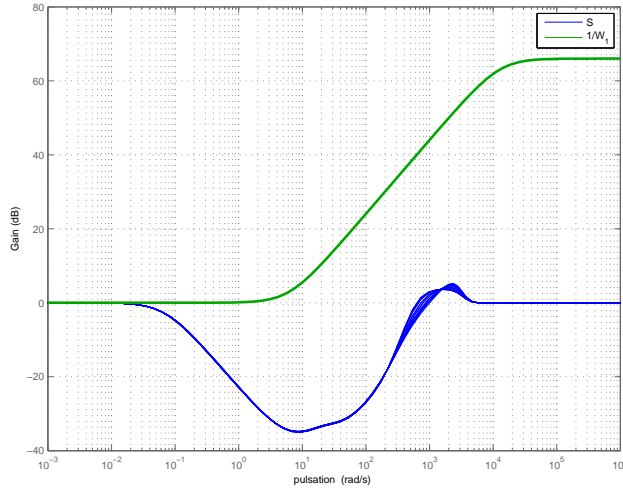
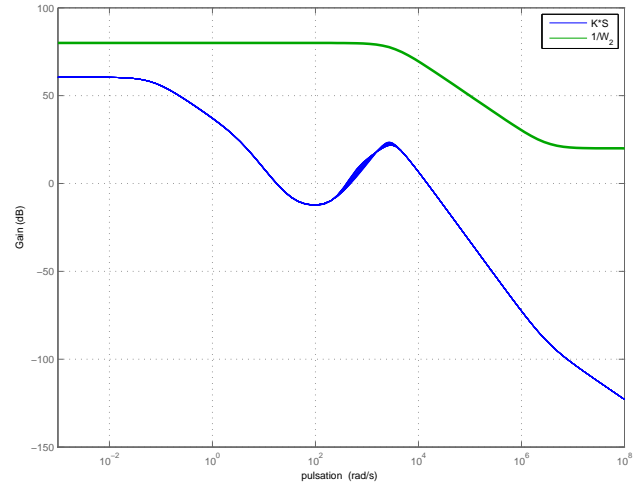
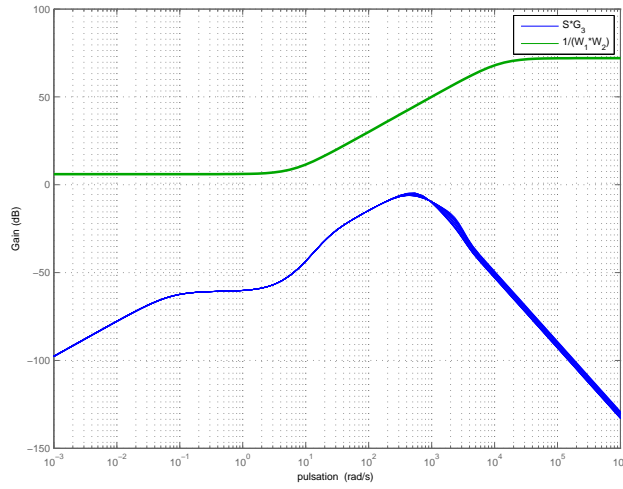
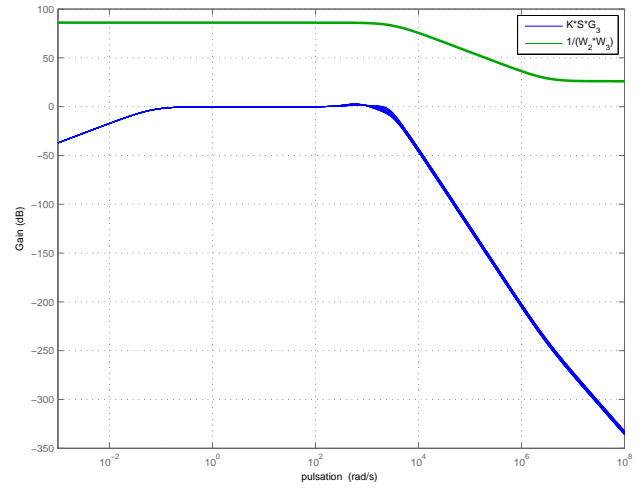
(a) Gabarit sur  $S$ (b) Gabarit sur  $KS$ (c) Gabarit sur  $SG_3$ (d) Gabarit sur  $KSG_3$ 

Figure 5.21 Validation des gabarits fréquentiels choisis – Pot vibrant #3

Le résultat de la simulation du système en boucle fermée est illustré à la figure 5.22. On constate que la stratégie de contrôle assure la poursuite du signal de référence en fréquence et en amplitude, chose qu'on n'a pas pu obtenir par le contrôleur à retard de phase. Toutefois, le signal de commande réagit plus rapidement au début et à la fin de la période du signal *Transient*. Enfin, on remarque également que le profil fréquentiel calculé est identique à celui désiré.

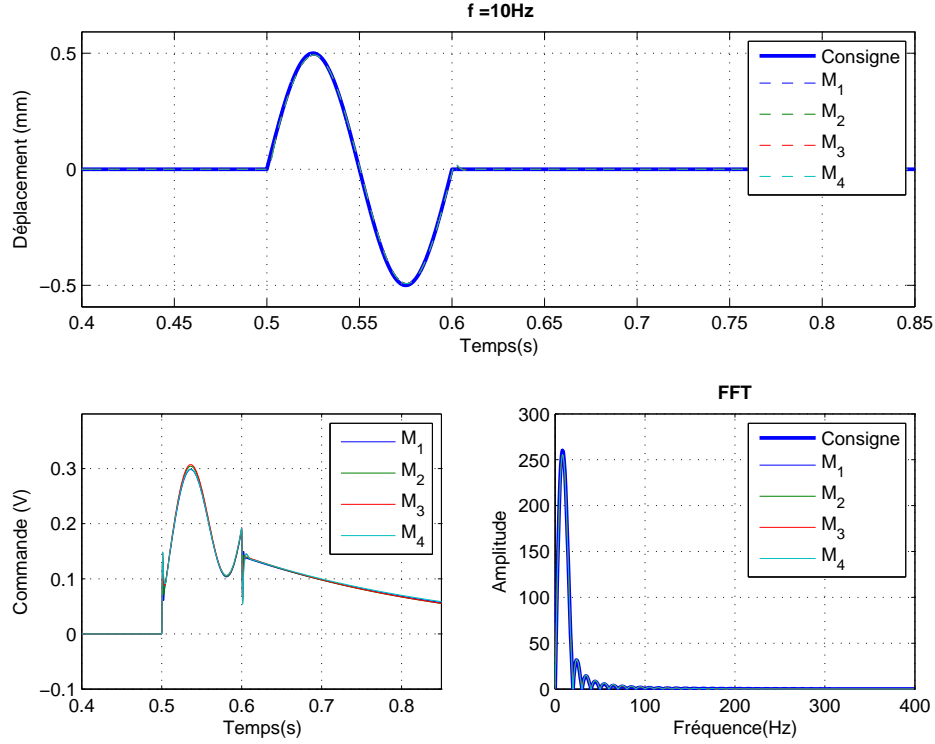


Figure 5.22 Contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  – Entrée *Transient* –  $f = 10$  Hz – Pot vibrant #3

### 5.3.4 Contrôleur $\mathcal{H}_\infty$ structuré

Lors de la synthèse de ce contrôleur, nous avons deux degrés de liberté qui consistaient en la structure du contrôleur et les fonctions de pondérations. Ainsi, en modifiant ces deux éléments, la valeur de  $\gamma_{opt}$  évoluait. L'objectif était de trouver la structure la plus simple du contrôleur qui permet d'avoir un  $\gamma_{opt}$  le plus faible pour ensuite modifier les fonctions de pondération et par le fait même diminuer la valeur de  $\gamma_{opt}$ .

La structure adoptée est d'ordre 3 et les fonctions de pondération sont les mêmes que dans l'équation 5.16, à part  $W_3$  qui vaut maintenant 2. Cette synthèse conduit au contrôleur suivant avec un  $\gamma_{opt} = 1.23$  :

$$C_{3\mathcal{H}_\infty\text{struct}}(s) = \frac{5.5881(s + 594.9)(s + 15.83)(s + 0.7877)}{(s + 2327)(s + 3.517)(s + 2.563)} \quad (5.18)$$

Le résultat de la simulation en boucle fermée est celui de la figure 5.23. On remarque que le contrôleur assure la poursuite du signal de référence. On remarque cependant une différence en amplitude dans la première demi-période mais elle n'affecte pas de façon dramatique le profil fréquentiel résultant. L'effort de commande demeure acceptable et loin de la saturation.

Une dernière remarque qui peut être associée à ce contrôleur, en comparaison avec les deux précédents, est qu'il présente un compromis entre le contrôleur à retard de phase et le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  complet. Il combine donc entre la simplicité de la structure du premier contrôleur et l'efficacité du deuxième contrôleur.

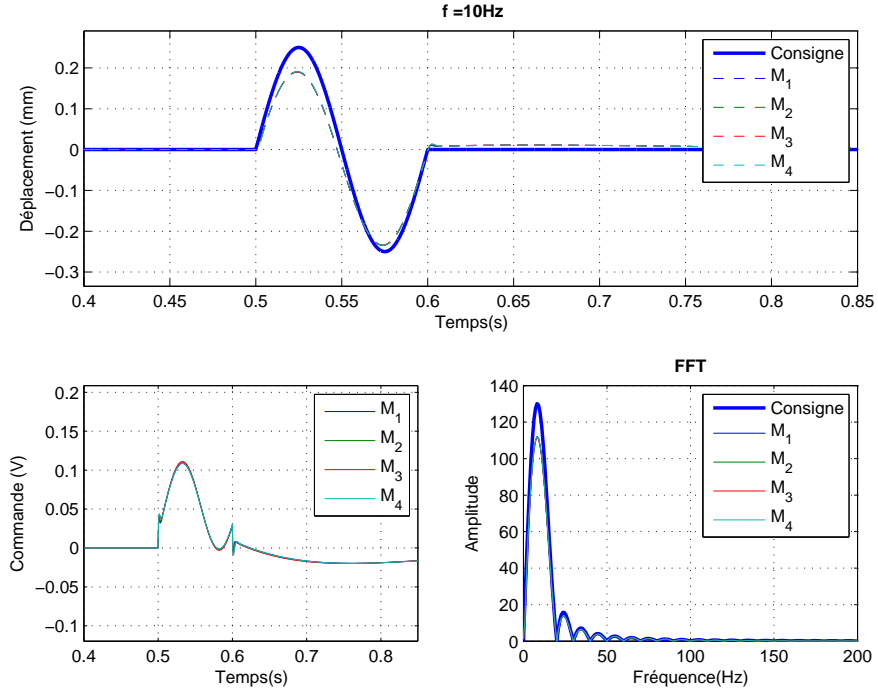


Figure 5.23 Contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structuré – Entrée *Transient* –  $f = 10$  Hz – Pot vibrant #3

## 5.4 Analyse des contrôleurs

### 5.4.1 Performances atteintes

Les contrôleurs développés atteignent certaines fréquences limites au-delà desquelles le déplacement du pot vibrant ne suit plus le signal de référence. Ces fréquences limites varient en fonction de la stratégie de contrôle adoptée et selon le type du signal de référence : *Transient*, *Blackman* ou *Multi-Blackman*.

Le tableau 5.1 résume les fréquences limites atteintes en simulation pour les trois stratégies de contrôle pour les deux pots vibrants étudiés. On y trouve également les liens vers les figures en annexes illustrant ces réponses.

Les trois stratégies de contrôle du pot vibrant arrivent à asservir le pot vibrant #1 jusqu'à la même fréquence limite de 40 Hz pour le signal *Transient*. Pour le signal *Blackman*, les lois

de commande robustes délivrent de meilleures performances que le contrôleur à retard de phase. Enfin, la fréquence limite atteinte en utilisant le signal *Multi-Blackman* est de 70 Hz pour les trois stratégies de contrôle. La figure 5.24 illustre mieux l'évolution des fréquences limites selon le type du signal et la méthode de contrôle testée.

Les simulations des stratégies de contrôle développées pour le pot vibrant #3 montrent que les contrôleurs  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mathcal{H}_\infty$  structuré délivrent les meilleures performances pour les trois types de signaux d'entrée. Toutefois, la limite pour le signal *Transient* demeure toujours plus faible que les deux autres profils de déplacement.

Une remarque commune aux deux pots vibrants est que la fréquence limite atteinte augmente lorsque les variations dans le signal de référence sont plus « lisses ». En effet, la pente au début et à la fin des signaux *Blackman* et *Multi-Blackman* est moins brusque que celle du signal *Transient*.

Tableau 5.1 Fréquences limites des contrôleurs en simulation

	Contrôleur	Signal de référence	Limite fréquentielle (Hz)	Figures en annexe
<b>Pot vibrant #1</b>	Retrad de phase	<i>Transient</i>	40	figure C.1
		<i>Blackman</i>	50	
		<i>Multi-Blackman</i>	70	
	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$	<i>Transient</i>	40	figure C.2
		<i>Blackman</i>	60	
		<i>Multi-Blackman</i>	70	
	Synthèse $\mathcal{H}_{\infty\text{struct}}$	<i>Transient</i>	40	figure C.3
		<i>Blackman</i>	60	
		<i>Multi-Blackman</i>	70	
<b>Pot vibrant #3</b>	Retard de phase	<i>Transient</i>	40	figure C.4
		<i>Blackman</i>	50	
		<i>Multi-Blackman</i>	80	
	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$	<i>Transient</i>	50	figure C.5
		<i>Blackman</i>	70	
		<i>Multi-Blackman</i>	100	
	Synthèse $\mathcal{H}_{\infty\text{struct}}$	<i>Transient</i>	50	figure C.6
		<i>Blackman</i>	60	
		<i>Multi-Blackman</i>	100	

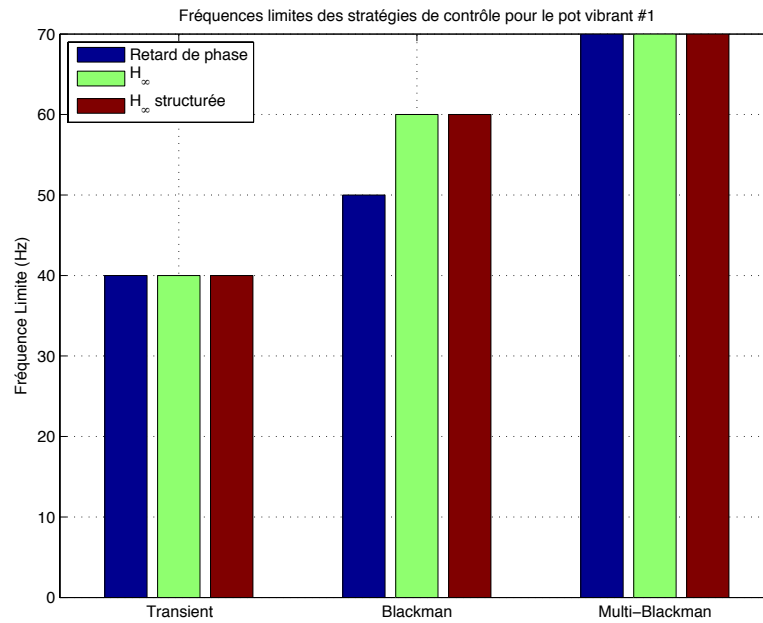


Figure 5.24 Fréquences limites en simulation – Pot vibrant #1

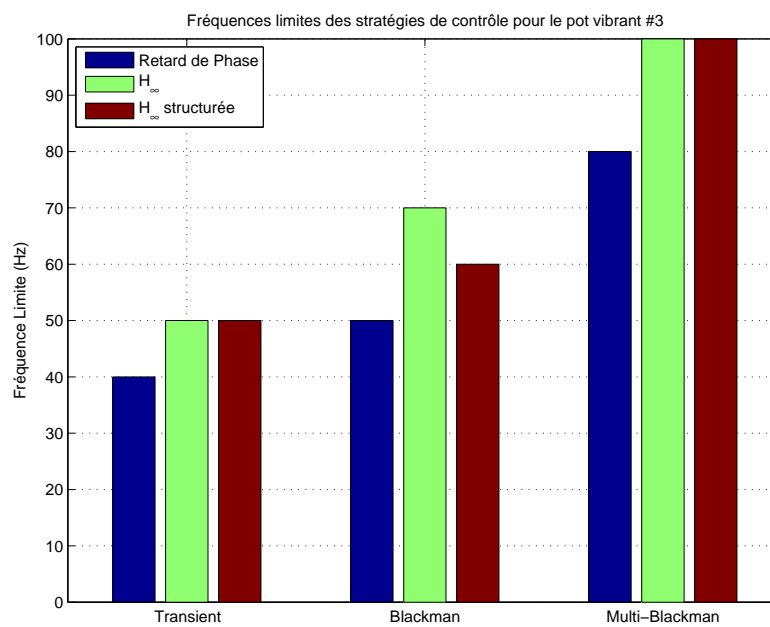


Figure 5.25 Fréquences limites en simulation – Pot vibrant #3

### 5.4.2 Robustesse via les applications gardiennes

Les performances décrites dans la section précédente concernent les limitations des lois de commande en fonction du type du signal d'entrée et sa fréquence. Dans ce qui suit, nous présentons les limites des stratégies de contrôle en fonction des masses des porte-échantillons. On désire connaître l'intervalle de masses dans lequel les performances désirées établies précédemment sont vérifiées. Les applications gardiennes sont un outil qui va nous permettre de trouver exactement le plus grand intervalle de variations des masses dans lequel les performances désirées sont respectées.

On reprend la même procédure utilisée dans l'exemple 5.3. On commence par isoler le dénominateur du système incertain en boucle fermée en fonction de la masse puis on calcule la matrice compagne équivalente. On choisit l'application gardienne qui délimite le lieu des pôles en boucle fermée. Le domaine de stabilité (performance) recherché est donné par la multiplication des deux applications 5.8 et 5.9. Ensuite, on relève les lieux d'annulation des applications gardiennes pour avoir l'intervalle maximal où les performances seront respectées. Les figures obtenues ne permettent pas de bien visualiser les lieux d'annulation des applications gardiennes, nous présentons donc les intervalles obtenus après analyse des racines réelles des polynômes obtenus (ordres très élevés). Le tableau 5.2 résume les intervalles obtenus.

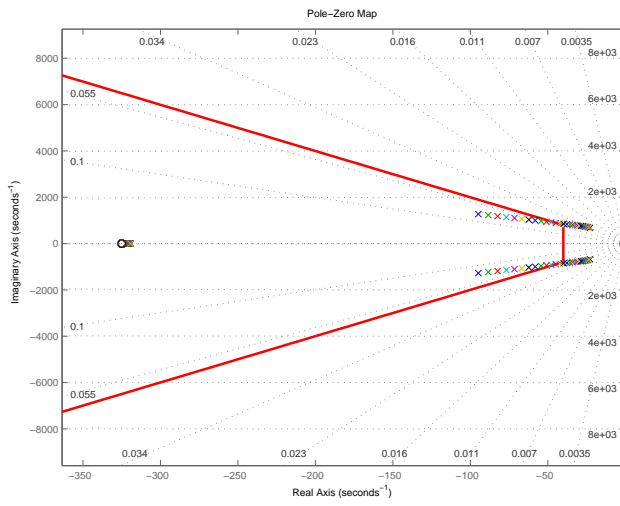
Toutefois, pour nous assurer des résultats obtenus, nous présentons également l'évolution des pôles des systèmes en boucle fermée pour plusieurs masses. L'intersection avec la zone désirée pour le placement des pôles devrait coïncider avec la valeur obtenue par les applications gardiennes.

On constate que les stratégies de commande robuste pour les deux pots vibrants respectent les performances désirées pour les masses étudiées. On peut même aller plus loin que l'intervalle des masses disponibles tout en respectant les spécifications initiales. Le contrôleur à retard de phase n'arrive pas à assurer le placement des pôles dans la zone souhaitée pour toutes les masses.

Les figures 5.26 et 5.27 vérifient les valeurs obtenues par les applications gardiennes lorsque les pôles traversent le lieu de placement désiré. Pour trouver exactement les mêmes valeurs que les applications gardiennes, un maillage fin des masses est requis.

Tableau 5.2 Intervalles de masses obtenus par les applications gardiennes

	Stratégie	Intervalle
<b>Pot vibrant #1</b>	Retard de phase	]0 90.57g[
	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$	]0 213.03g[
	Synthèse $\mathcal{H}_{\infty\text{struct}}$	]0 212.27g[
<b>Pot vibrant #3</b>	Retard de phase	]0 79.55g[
	Synthèse $\mathcal{H}_\infty$	]32.44g 242.09g[
	Synthèse $\mathcal{H}_{\infty\text{struct}}$	]0 290.55g[



(a) Retard de phase

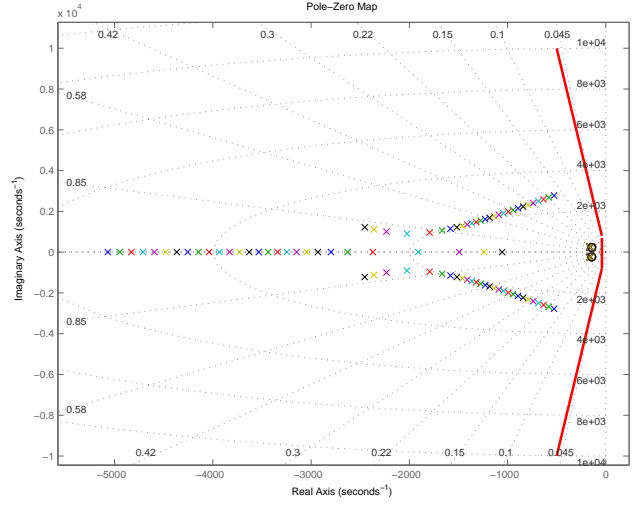
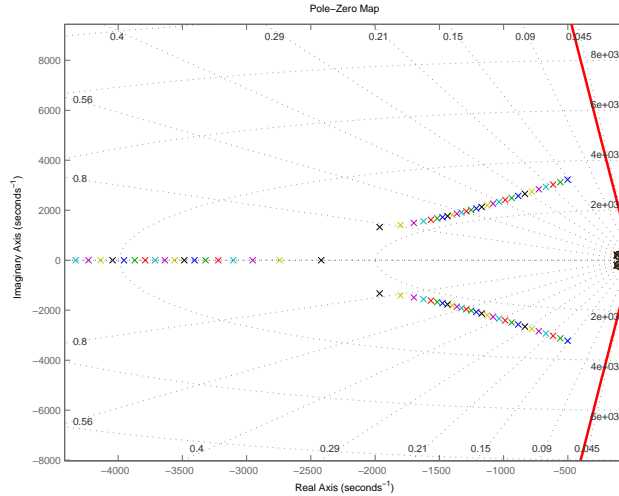
(b) Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ (c) Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée

Figure 5.26 Évolution des pôles en boucle fermée en fonction de la masse – Pot vibrant #1

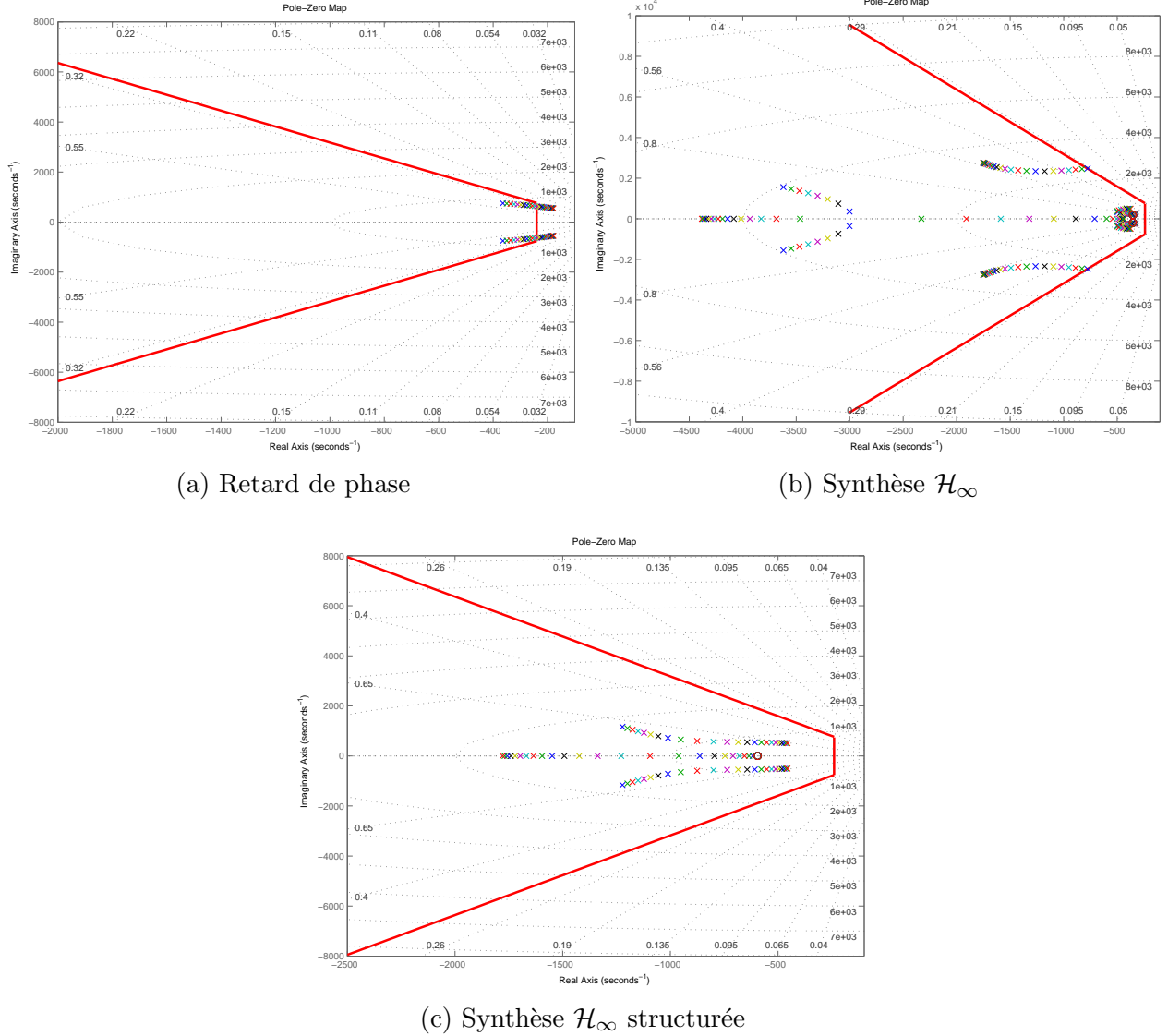


Figure 5.27 Évolution des pôles en boucle fermée en fonction de la masse – Pot vibrant #3

### 5.4.3 Robustesse via la $\mu$ -analyse

On présente maintenant les performances des lois de commande synthétisées à l'aide de la  $\mu$ -analyse. On procède de la même manière présentée dans l'exemple 5.4. La première étape consiste à isoler les incertitudes paramétriques afin de représenter le système sous la forme de la figure 5.7. Cette structure permet d'extraire les transferts reliant  $\eta$  et  $\nu$ .

On écrit la masse du porte-échantillon sous la forme suivante :

$$M = M_0 + k\delta_1 ; \quad -1 \leq \delta_1 \leq 1$$



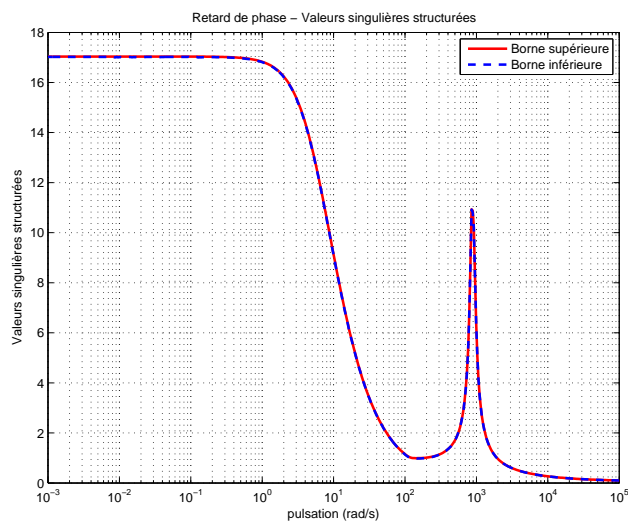
et

- $M_0 = 0.091$  g ;  $k = 0.061$  pour le pot vibrant #1 ;
- $M_0 = 0.099$  g ;  $k = 0.036$  pour le pot vibrant #3.

Le bloc  $\Delta$  est une matrice diagonale avec 9 éléments réels répétés dans le cas du pot vibrant #1, et 11 éléments réels répétés dans le cas du pot vibrant #3. On augmente ce bloc par 3 blocs « *full* » pour représenter les performances fréquentielles souhaitées.

La figure 5.28 présente les résultats obtenus pour le pot vibrant #1. On constate que le contrôleur à retard de phase est le moins performant des trois contrôleurs. Les contrôleurs robustes présentent relativement les mêmes marges de performances. On remarque qu'on dépasse la valeur 1 aux hautes fréquences ce qu'on pouvait anticiper suite aux résultats obtenus lors de la vérification des gabarits fréquentsiels à la figure 5.15.

Pour le pot vibrant #3, on remarque qu'on est à la limites des performances fréquentielles désirées comme le montre la figure 5.29. En effet, la valeur maximale de la VSS pour les trois lois de commande est 1 (très légèrement dépassée dans  $\mathcal{H}_\infty$  structurée). Ce résultat est confirmé par l'analyse des gabarits fréquentsiels de la figure 5.21. On peut également constater que la VSS du contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  décroît plus rapidement que les deux autres contrôleurs, ce qui lui attribue des performances meilleures sur une plus large bande de fréquences.



(a) Retard de phase

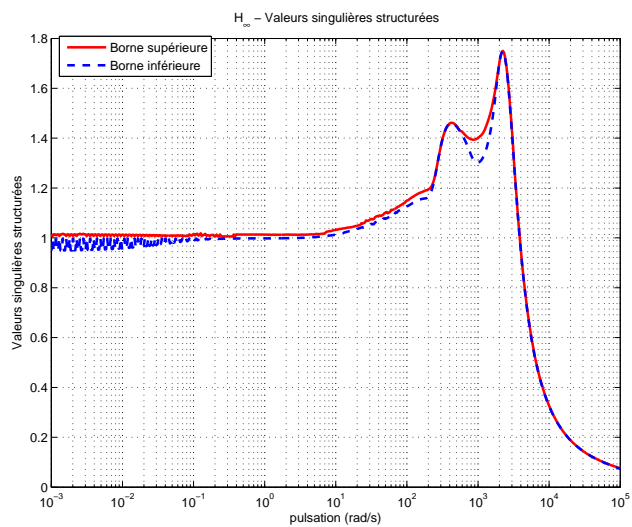
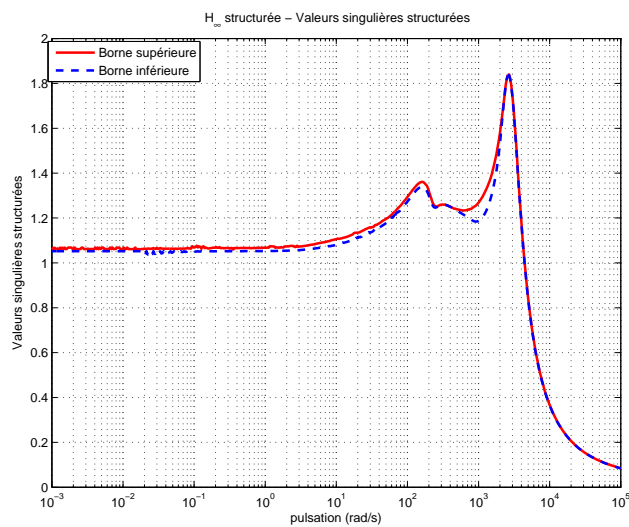
(b) Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ (c) Synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée

Figure 5.28 Performances des lois de commande – Pot vibrant #1

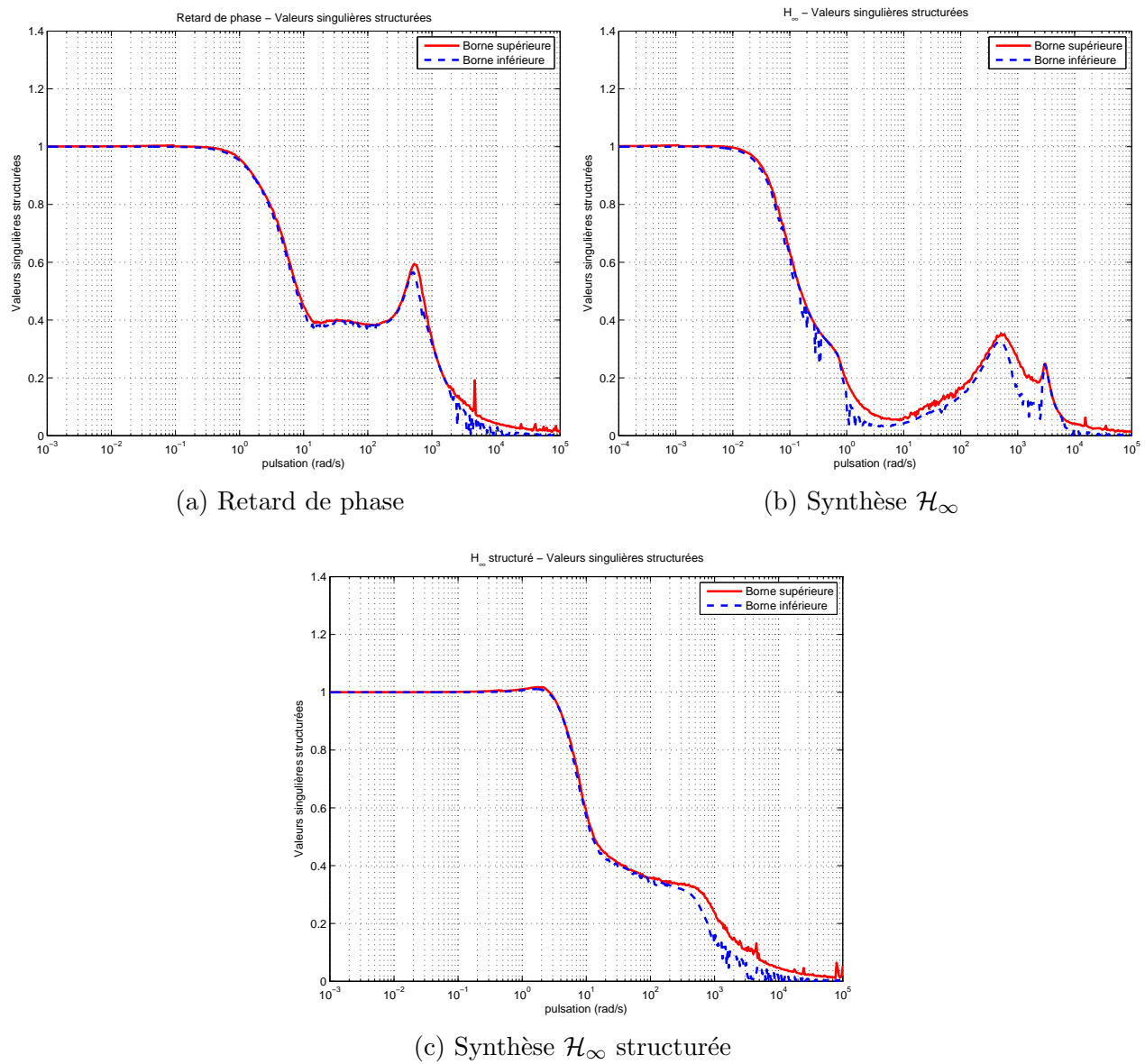


Figure 5.29 Performances des lois de commande – Pot vibrant #3

## 5.5 Conclusion

À travers ce chapitre, nous avons fait plusieurs rappels théoriques pour expliquer la démarche poursuivie pour synthétiser les correcteurs. Ensuite, on a présenté les résultats de simulation obtenus pour le signal *Transient* et l'analyse de la robustesse des lois de commande a été étudié dans la dernière partie du chapitre.

On remarque que les stratégies de contrôle atteignent des fréquences limites au-delà desquelles le correcteur ne peut plus assurer la poursuite du signal de référence comme le montre le tableau 5.1. On constate que les fréquences limites les plus basses sont celles du signal *Transient*. Ceci est expliqué par les transitions rapides au début et la fin du signal par rapport aux deux autres signaux de référence.

On considère que la limite physique du système est atteinte. Pour illustrer cela, on a appliqué une entrée échelon d'amplitude maximale afin de voir la rapidité avec laquelle le système réagit face au maximum d'énergie. On superpose cette courbe sur un signal sinusoïdal afin de comparer les pentes des montées du pot vibrant comme le montre la figure 5.30. Au-delà de 60 Hz le système est plus lent que la sinusoïde.

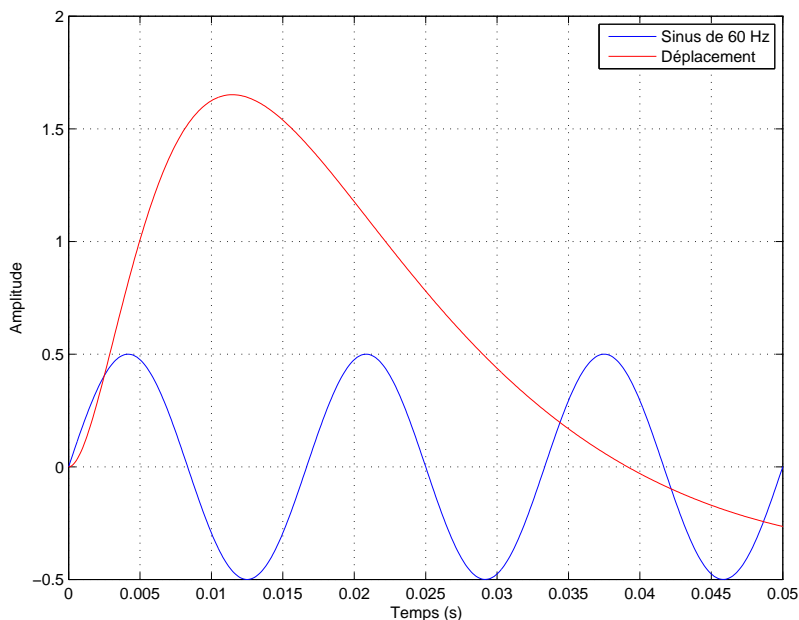


Figure 5.30 Réponse du système vs sinusoïde – Pot vibrant #3

Les trois lois de commande du pot vibrant #3 sont implantées sur le système physique et les résultats sont présentés dans le chapitre suivant.

## CHAPITRE 6

### Implantation et validation expérimentale des contrôleurs

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire les différents éléments choisis pour implanter le système de contrôle. Ensuite, on présente les résultats expérimentaux du contrôle du pot vibrant #3 pour le correcteur à retard de phase et les contrôleurs développés via la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée. À la fin du chapitre, on résume les limites des stratégies de contrôle et on les compare aux limites obtenues en simulation.

#### 6.1 Implantation du contrôleur en temps réel

##### 6.1.1 Éléments du système de contrôle

Les contrôleurs développés sont implantés dans l'environnement **Matlab**<sup>®</sup> à l'aide de l'outil **xPC Target**<sup>™</sup> (MathWorks<sup>®</sup>, 2012d).

##### ◆ **xPC Target**<sup>™</sup>

**xPC Target**<sup>™</sup> est un produit conçu pour l'exécution en temps réel des modèles de simulation et de contrôle réalisés sous l'interface **Simulink**<sup>®</sup> à l'aide de la boîte à outils **Real-Time Workshop**<sup>®</sup><sup>1</sup> (RTW) (MathWorks<sup>®</sup>, 2012b). Cette dernière permet de générer le code source qui sera utilisé pour le contrôle en temps réel.

Pour exécuter le contrôle en temps réel, deux composantes majeures sont nécessaires :

- Un **ordinateur hôte** pouvant supporter **Matlab**<sup>®</sup> et **Simulink**<sup>®</sup> et les boîtes à outils **Real-Time Workshop**<sup>®</sup> et **xPC Target**<sup>™</sup>. Ensuite, il faut réaliser le diagramme fonctionnel sous **Simulink**<sup>®</sup> incluant le contrôleur, les signaux d'entrée et un ensemble d'entrées/sorties vers le système réel qui remplace le modèle utilisé en simulation. Enfin, le diagramme est compilé dans RTW pour générer un fichier exécutable.
- Un **ordinateur cible** dédié uniquement à l'exécution du programme du contrôleur compilé au préalable. Il contient les entrées/sorties qui permettent l'interaction avec le système physique via les cartes d'acquisition des signaux nécessaires. Ces cartes sont

---

1. Il est appelé **Simulink Coder**<sup>™</sup> également

insérées dans le modèle **Simulink**<sup>®</sup> et doivent être configurées pour la lecture des données des capteurs. Il est aussi possible de récupérer les données en les renvoyant à l'ordinateur hôte ; il n'y a cependant pas de garantie que cette transmission se fasse en temps réel à cause d'un très léger délai de traitement. La cible devient autonome une fois que le programme est embarqué dessus.

Le système de contrôle que nous avons utilisé est illustré à la figure 6.1 :

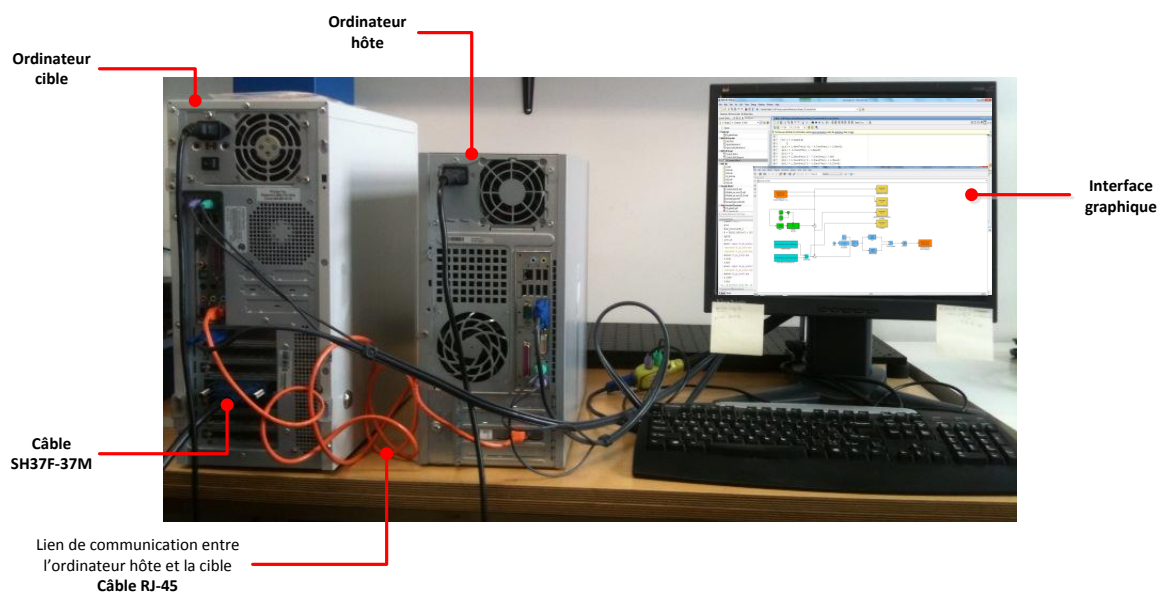


Figure 6.1 Système de contrôle

### ◆ Carte d'acquisition

La carte d'acquisition choisie est la PCI-6221 (37 broches)(National-Instruments<sup>TM</sup>, 2012) de National Instruments<sup>TM</sup> (figure 6.2). Elle fait partie de la Série M faible coût et est destinée aux développeurs. Les caractéristiques de ses entrées et sorties analogiques sont résumées dans le tableau 6.1. De plus, afin d'avoir accès aux signaux d'entrée et de sortie du système physique, nous utilisons le bloc de connexion, borniers à vis, CB-37FH ainsi que le câble SH37F-37M (figure 6.3).

Tableau 6.1 Caractéristiques de la carte d'acquisition PCI-6221 (37 broches)

	Nombre de voie	Fréquence maximale	Tension (V)	Résolution (bits)
Entrées analogiques	16 en <i>Single Ended</i>	250 kéch./s	$\pm 10$	16
	8 en <i>Differential</i>			
Sorties analogiques	2	833 kéch./s	$\pm 10$	16



Figure 6.2 Carte d'acquisition PCI-6221 (37 broches)



(a) Bloc de connexion CB-37FH



(b) Câble SH37f-37M

Figure 6.3 Câble et bloc de connexion

Deux modes sont disponibles pour réaliser les mesures :

- Le mode *Single Ended*, où un seul canal est utilisé comme entrée analogique alors que le deuxième canal est commun à toutes les autres bornes. Cette configuration est très sensible au bruit de mesure (figure 6.4a).
- Le mode *Differential*, où deux canaux (positif et négatif) sont nécessaires pour effectuer les mesures. L'avantage de cette configuration est la réjection du bruit de mesure résultant en une meilleure qualité de données que dans le mode *Single Ended* (figure 6.4b).

La figure 6.4 montre clairement la différence entre ces deux modes de mesures pour une fréquence *Transient* à 10 Hz d'amplitude 0.5 V et avec une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz.

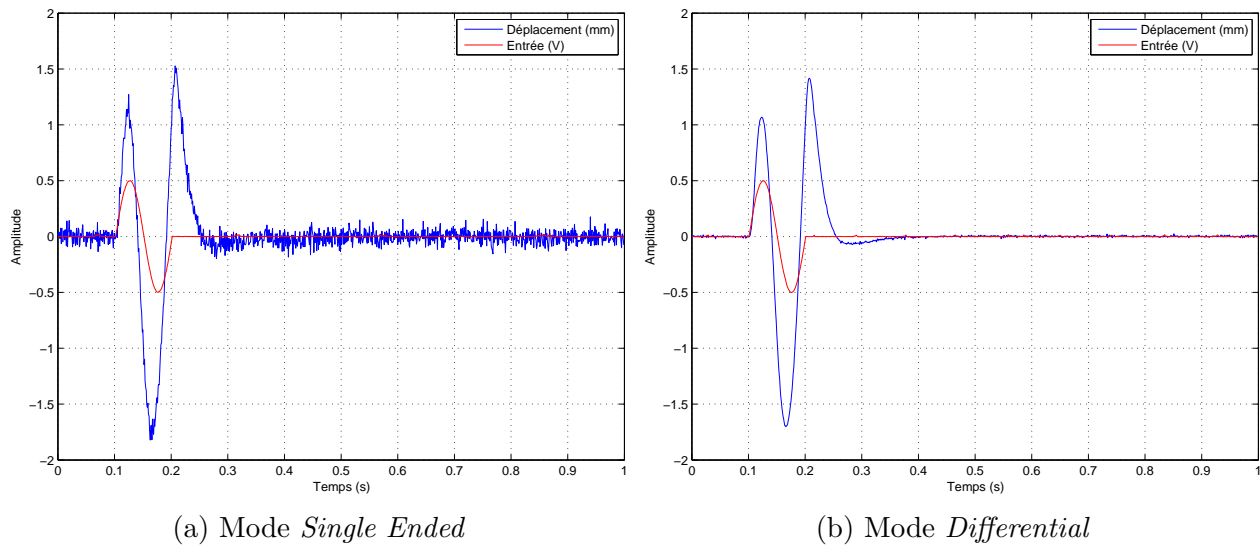


Figure 6.4 Comparaison des modes *Single Ended* et *Differential*

#### ◆ Autres composantes du système

- Le capteur de déplacement utilisé est le capteur laser LKG32 (Keyence, 2012). Les données de déplacement sont transférées à son contrôleur qui les convertit en tension puis les transfère à son tour à la carte d'acquisition à chaque  $20 \mu\text{s}$ . Un déplacement de 1 mm correspond à 1 V.
- L'amplificateur audio utilisé est le STEWARTAUDIO AV50-2 (STEWARTAUDIO, 2012). Sa puissance est de 25 W et sa bande passante s'étend de 10 Hz jusqu'à 50 kHz.



◆ Schéma général de connexion des différents éléments du système de contrôle

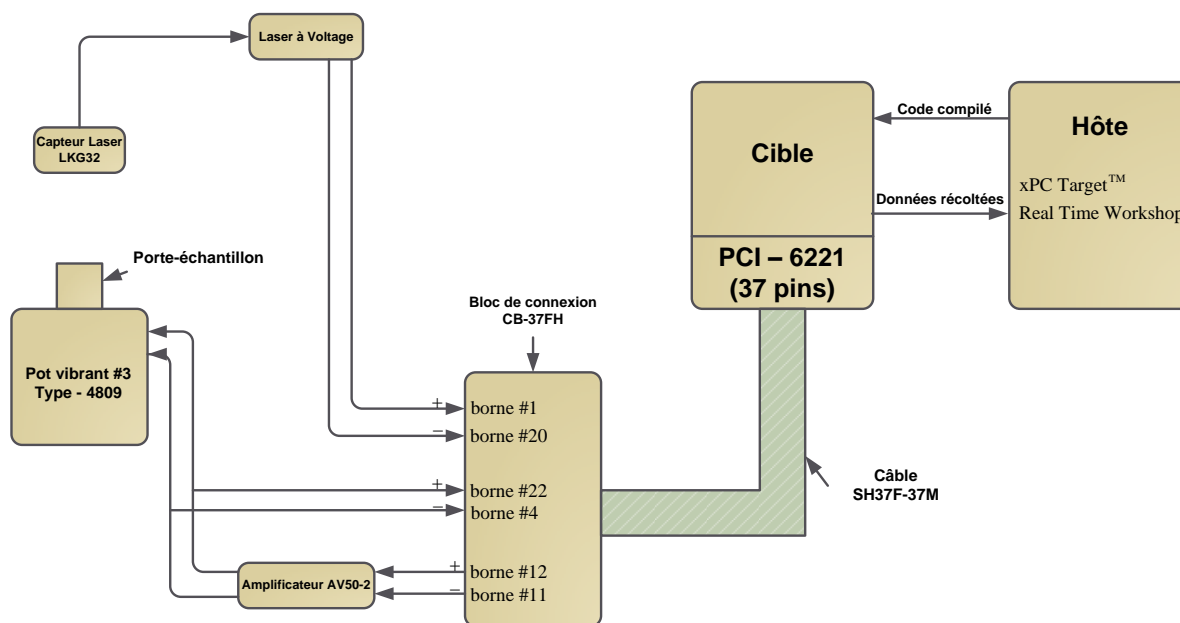


Figure 6.5 Schéma général des éléments de contrôle

La correspondance entre les bornes du connecteur et la carte d'acquisition est donnée dans le tableau 6.2.

Tableau 6.2 Correspondance entre le connecteur et la carte d'acquisition

Mesure	Module de connexion	Carte d'acquisition
Déplacement	borne #1	Entrée analogique 1
	borne #20	Entrée analogique 8
Entrée du pot vibrant	borne #22	Entrée analogique 2
	borne #4	Entrée analogique 10
Commande calculée	borne #12	Sortie analogique 0
	borne #11	Sortie analogique 0 GND

### 6.1.2 Schéma de contrôle sous Simulink®

Le schéma de contrôle sous Simulink® est présenté à la figure 6.6. L'entrée de la carte d'acquisition, bloc PCI-6221/37 AD, reçoit la mesure du déplacement et la sortie de l'amplificateur.

La mesure envoyée par le capteur laser contient un *offset* qui est calculé durant les premières 0.45 s avant l'envoi de la consigne à l'aide du bloc **mean**. Cette valeur est ensuite soustraite de la mesure initiale et le résultat peut ainsi être comparé à la consigne. Le contrôle est activé à partir de 0.45 s et l'utilisateur choisit le contrôleur à tester.

Les tests ont montré que lorsque l'amplitude du signal d'entrée est supérieure à 0.6 V, le déplacement du pot vibrant dépasse les limites du capteur laser et renvoie une valeur constante de 10 V à la carte d'acquisition. Nous avons ainsi fixé la valeur de la saturation à  $V_{\text{sat}} = \pm 0.6$  V.

Enfin, la commande est envoyée à l'amplificateur audio par la sortie analogique #1 de la carte d'acquisition, bloc **PCI-6221/37 DA**, et les données sont récupérées à l'aide des blocs **Host Scope**. On affiche le déplacement du pot vibrant avant et après soustraction de la valeur du *offset*, le signal de sortie de l'amplificateur et le profil de déplacement désiré.

Les étapes à suivre pour effectuer un test sont :

1. Exécuter le fichier contenant le type d'entrée, la fréquence, l'amplitude et le contrôleur à utiliser.
2. Bâtir<sup>2</sup> le code source à partir du diagramme **Simulink**<sup>®</sup> puis le transférer à la cible.
3. Lancer le test puis récupérer les signaux des **Host Scope** pour analyse.

## 6.2 Résultats expérimentaux obtenus<sup>3</sup>

Le résultat obtenu pour le contrôleur à retard de phase est celui présenté à la figure 6.7. La réponse du système pour une entrée *Transient* ne suit pas parfaitement le signal de référence en amplitude. On remarque cette différence surtout dans la première demi-période. On constate également des oscillations à la fin de la période du signal. D'autre part, le contrôleur assure la poursuite des signaux *Blackman* et *Multi-Blackman* en fréquence comme le montre leur profil fréquentiel. Toutefois, l'amplitude des signaux de sortie est plus basse que celle de la référence. Enfin, pour les trois signaux, l'effort de commande est loin des limites de la saturation.

L'implantation de la deuxième loi de commande donne le résultat de la figure 6.8. On remarque que pour les trois signaux, le système arrive à se déplacer suivant les profils de

---

2. Bouton **Incremental build** dans **Simulink**<sup>®</sup>

3. Les résultats présentés dans cette section sont ceux du porte-échantillon le plus lourd de masse  $M_4 = 135.9$  g. Ce cas est considéré comme le pire cas.

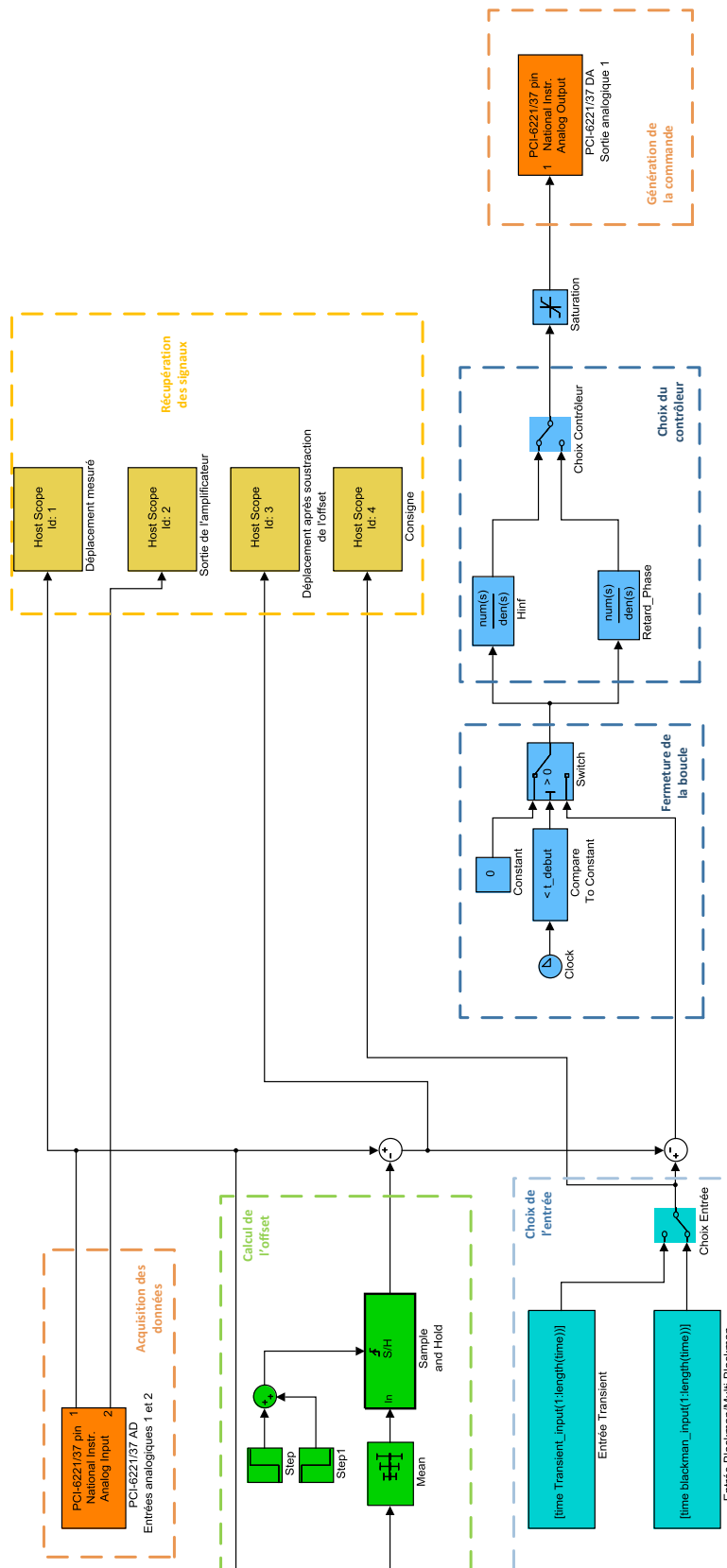


Figure 6.6 Schéma de contrôle Simulink®

déplacement désirés. La poursuite du signal *Transient* est moins bonne dans la première demi-période et de très faibles oscillations apparaissent à la fin du signal de sortie. L'effort de commande demeure faible dans les trois cas testés.

Enfin, la troisième stratégie de contrôle par synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée nous donne le résultat de la figure 6.9. La première remarque est la différence en amplitude dans la première demi-période des signaux *Transient* et *Blackman*. En deuxième lieu, des oscillations apparaissent à la fin de la période du signal *Transient*. Leur amplitude est moins importante que celle affichée dans le cas du contrôleur à retard de phase. Une dernière remarque concerne le signal de commande ; on constate qu'il contient plus de bruit aux hautes fréquences que dans la commande du contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$ . Ceci est dû à la suppression des pôles en hautes fréquences lors de la réduction de l'ordre du contrôleur.

On constate que les trois contrôleurs utilisés améliorent la réponse du pot vibrant par rapport à son déplacement en boucle ouverte. On atteint, cependant, des fréquences limites en fonction du type d'entrée appliquée. Ces limitations sont présentées dans la section suivante.

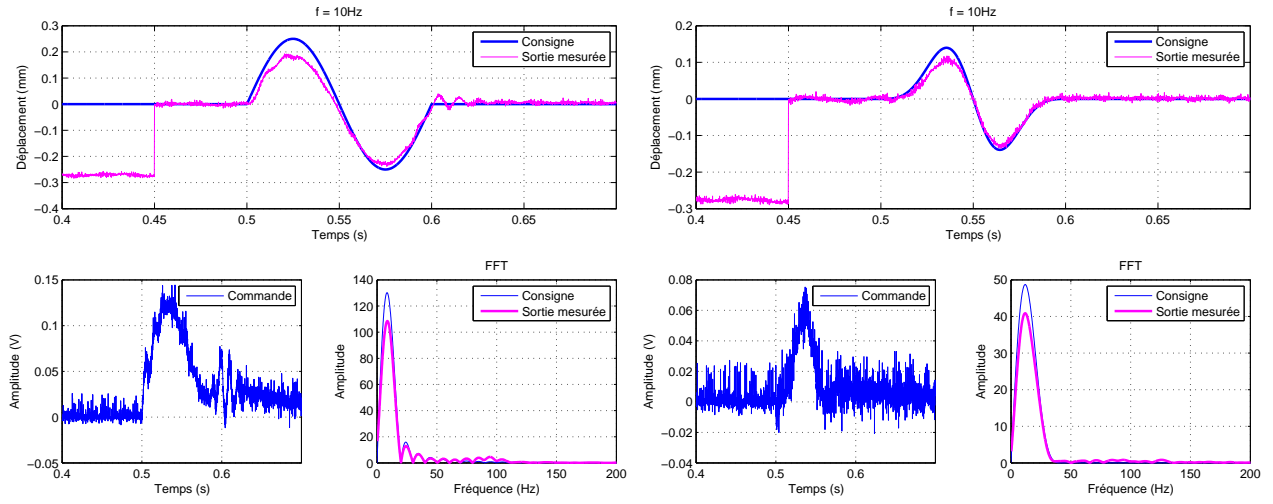
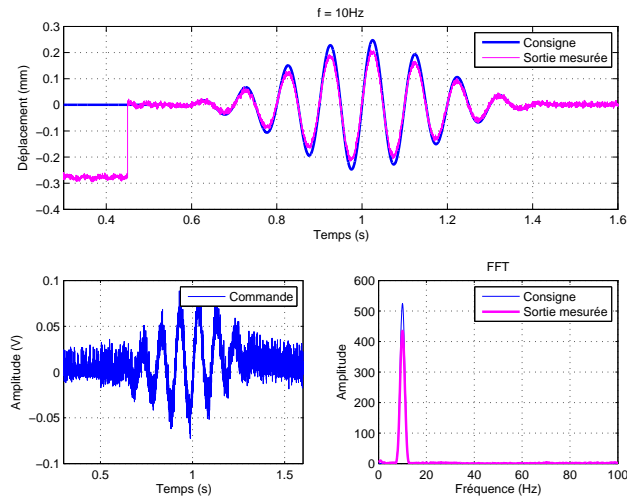
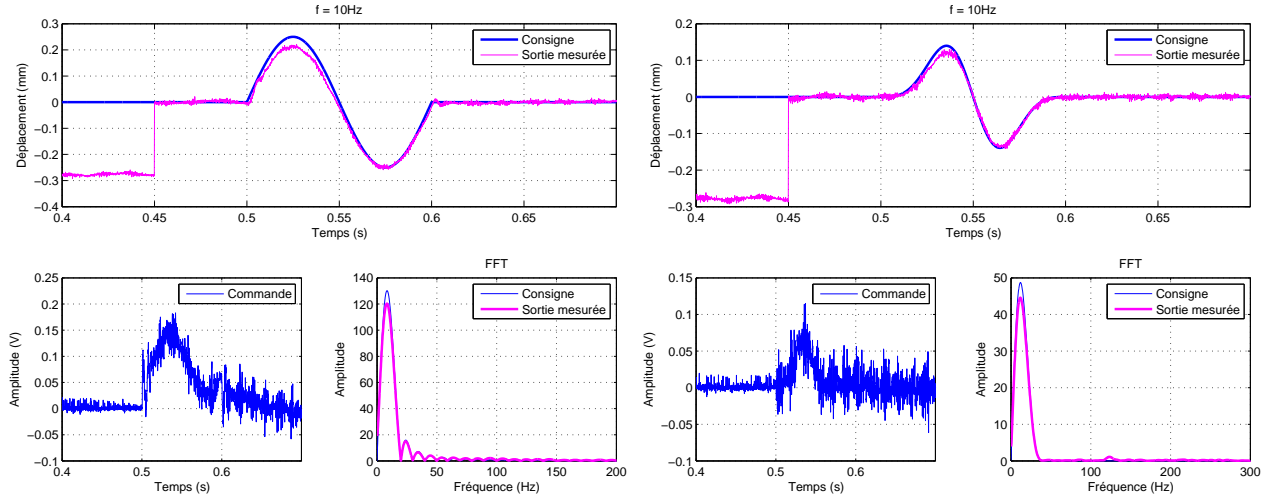
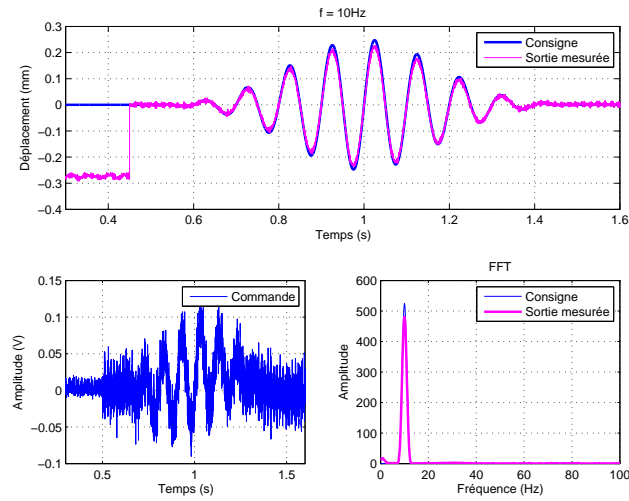
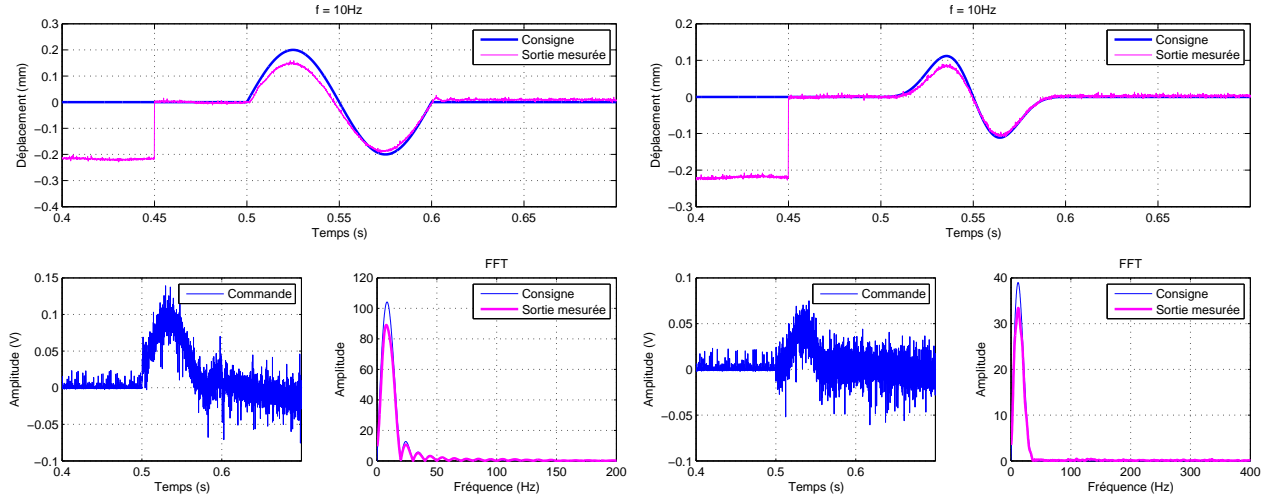
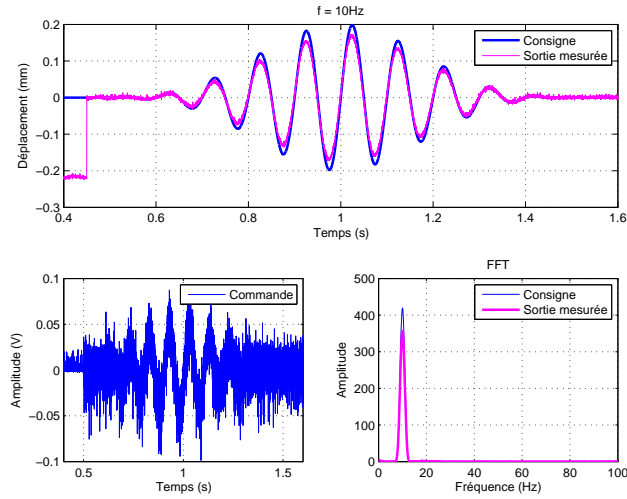
(a) Entrée *Transient*(b) Entrée *Blackman*(c) Entrée *Multi-Blackman*

Figure 6.7 Contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #3

(a) *Entrée Transient*(b) *Entrée Blackman*(c) *Entrée Multi-Blackman*Figure 6.8 Contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  – Pot vibrant #3

(a) *Entrée Transient*(b) *Entrée Blackman*(c) *Entrée Multi-Blackman*Figure 6.9 Contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structuré – Pot vibrant #3

### 6.3 Performances atteintes en expérimentation

Les fréquences limites pour chacun des contrôleurs se trouvent dans le tableau 6.3. On y présente également les liens vers les figures de l'annexe D qui illustrent la réponse à chacune de ces fréquences.

En comparant les performances des trois stratégies de contrôle, on constate que celles basées sur les contrôleurs robustes offrent de meilleures performances pour les trois profils de vibration. En effet, les fréquences limites pour les entrées *Transient* et *Blackman* sont repoussées de 20 Hz par rapport à la fréquence limite du contrôleur à retard de phase. Pour l'entrée *Blackman*, la fréquence limite est de 50 Hz. Pour le signal *Multi-Blackman*, le contrôleur obtenu par synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  donne la plus haute fréquence limite qui est de 100 Hz. La figure 6.10 illustre l'évolution de la fréquence limite en fonction du contrôleur utilisé et du type d'entrée appliqué au pot vibrant.

Enfin, on remarque également une concordance entre les résultats expérimentaux et les résultats de simulation pour les trois contrôleurs. Bien que cette concordance ne soit pas parfaite, le système en boucle fermée du modèle identifié traduit presque les mêmes phénomènes que ceux de la partie pratique. La comparaison des tableaux 5.1 et 6.3 confirment cette conclusion. Ces différences sont expliquées par l'ajout du bruit de mesure dans la boucle de contrôle, les vibrations externes dues aux mouvements des personnes dans le local et autres engins en circulation à l'extérieur, ainsi que les hypothèses utilisées lors de l'identification.

Tableau 6.3 Fréquences limites obtenues en expérimentation

Contrôleur	Type d'entrée	Fréquence limite (Hz)	Figures en annexe
Retard de phase	<i>Transient</i>	30	figure D.1
	<i>Blackman</i>	30	
	<i>Multi-Blackman</i>	60	
Synthèse $\mathcal{H}_\infty$	<i>Transient</i>	50	figure D.2
	<i>Blackman</i>	50	
	<i>Multi-Blackman</i>	100	
Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ structurée	<i>Transient</i>	60	figure D.3
	<i>Blackman</i>	50	
	<i>Multi-Blackman</i>	70	



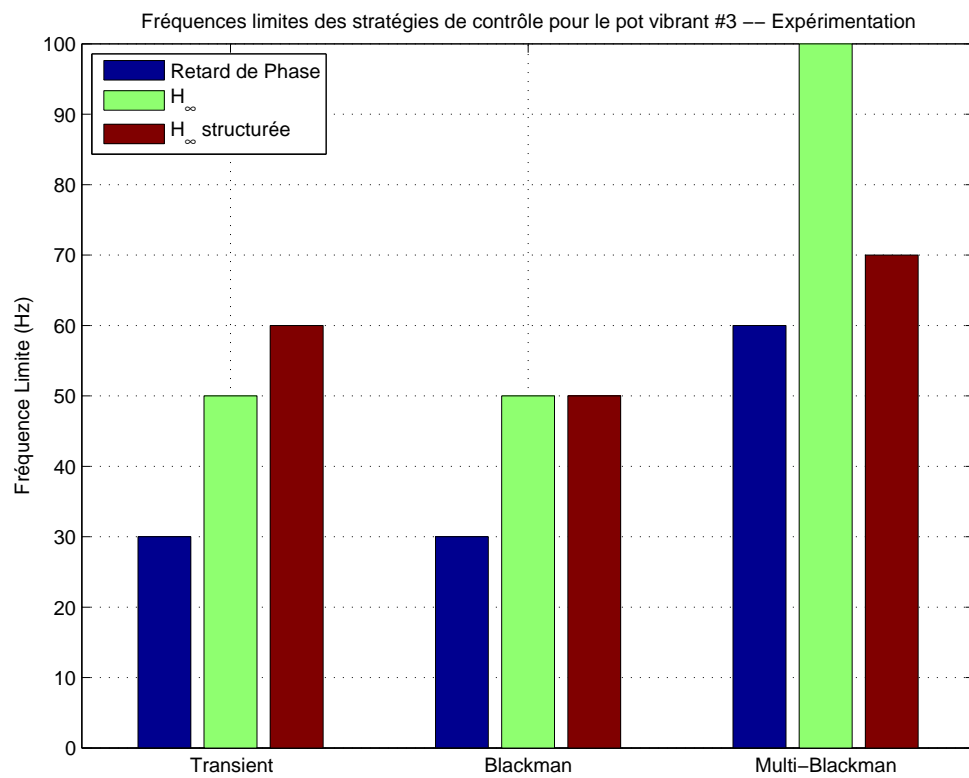


Figure 6.10 Fréquences limites en expérimentation – Pot vibrant #3

## CHAPITRE 7

### Conclusions générales

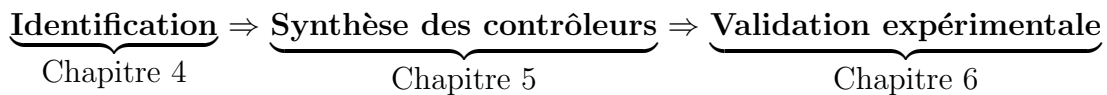
#### 7.1 Synthèse des travaux

Ce projet de maîtrise a été proposé par une entreprise locale spécialisée dans la conception et le développement de rhéomètres. Ce sont des instruments de mesure qui servent à la caractérisation des propriétés viscoélastiques des matériaux mous et des tissus biologiques. Dans le cadre de ce projet, nous nous sommes intéressés, en particulier au comportement d'un des éléments constituant les rhéomètres qui est le pot vibrant électrodynamique. L'objectif principal portait sur le développement d'un contrôleur qui assure la poursuite du déplacement des pots vibrants pour les trois signaux de référence particuliers :

- le signal *Transient* ;
- le signal *Blackman* ;
- et le signal *Multi-Blackman*.

De plus, le contrôleur synthétisé devait également assurer les mêmes performances pour les différentes masses des porte-échantillons utilisés.

Afin d'atteindre ces objectifs, nous avons divisé le projet en trois étapes principales que nous avons présentés dans ce mémoire :



#### ◆ Étape #1 : Identification des paramètres des pots vibrants

Nous avons étudié trois pots vibrants.

1. Le modèle retenu pour le pot vibrant #1 est celui d'un système masse-ressort-amortisseur d'ordre 2. L'évolution de chaque paramètre en fonction de la masse du porte-échantillon a été estimée pour obtenir au final un modèle qui dépend de la masse. Il a été validé par de nouvelles données expérimentales différentes de celles utilisées pour l'identification.
2. Le modèle du pot vibrant #2 n'a pas été élaboré jusqu'à la fin à cause de la divergence des paramètres identifiés d'une part pour les hautes fréquences et d'autre part pour les porte-échantillons lourds. Cette divergence est due à un défaut de fabrication dans la source vibrante qui induit, en plus du déplacement vertical, un déplacement latéral non désiré.

3. Le profil de déplacement du pot vibrant #3 est différent des deux premières sources vibrantes. Le modèle adopté est d'ordre 4 et possède une action dérivée. Comme pour les deux premiers pot vibrants, l'évolution des paramètres trouvés par identification est estimée en fonction des masses des porte-échantillons. Le modèle final est validé sur de nouvelles données expérimentales ainsi qu'à l'aide de la réponse fréquentielle.

Les modèles obtenus pour les pots vibrants #1 et #3 ont été utilisés dans la conception des lois de commande dans la deuxième étape.

### ◆ Étape #2 : Synthèse de stratégies de contrôle

Pour chaque pot vibrant, trois stratégies de contrôle ont été développées. La première consistait en le développement d'un contrôleur classique. Le correcteur utilisé est à retard de phase. La deuxième et troisième stratégie sont deux stratégies de contrôle robustes utilisées lorsque les processus sont incertains. C'est le cas de ce projet où l'incertitude est représentée par la variation de la masse des porte-échantillons. La première loi de commande robuste est la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  qui permet de prendre en compte les spécifications du cahier des charges sous forme de critères fréquentielles à l'aide des fonctions de pondération. Le choix de ses fonctions est basé sur un gabarit fréquentiel à respecter mais il n'existe pas de méthodes analytique pour les déterminer. En outre, l'ordre du contrôleur calculé est élevé et égal à celui du système augmenté. Ce dernier inconvénient nous a poussé à explorer une nouvelle méthode basée sur la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  et l'optimisation non-lisse qu'on appelle synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée (Apkarian et Noll, 2006). Cette technique permet de fixer l'ordre et certains paramètres du contrôleur ainsi que certains de ses paramètres..

L'objectif de poursuite des trois signaux de référence a été satisfait pour les trois structures de contrôle. Toutefois, nous avons atteint certaines limites selon la fréquence de la consigne et la masse du porte-échantillon.

Pour le pot vibrant #1, les trois contrôleurs atteignent la même limite pour l'entrée *Transient* et l'entrée *Multi-Blackman*. Par contre, pour l'entrée *Blackman*, le contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  garantit de meilleures performances, suivi du contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structuré et du contrôleur à retard de phase. Nous avons également remarqué que les performances des stratégies de contrôle se dégradent lorsque la masse des porte-échantillons augmente.

Pour le pot vibrant #3, les fréquences limites du contrôleur à retard de phase sont inférieures à celles des deux contrôleurs robustes. Ces derniers atteignent en simulation les mêmes performances pour les trois signaux de référence et ce, pour toutes les masses.

On remarque aussi, pour les trois stratégies, que les fréquences limites sont plus grandes lorsque les variations dans les signaux de références sont « lisses ». Lorsque les variations sont rapides, l'actionneur n'arrive plus à suivre les changements dans la commande calculée ce qui résulte en un déphasage et des oscillations à la fin du déplacement.

Les fréquences limites des contrôleurs en simulation pour les deux pots vibrants ont été présentées dans le tableau 5.1.

### ◆ Étape #3 : Implantation et validation expérimentale

Nous avons testé dans cette étape les trois contrôleurs développés pour le pot vibrant #3. Tout d'abord, il a fallu choisir la plate-forme et le matériel pour l'implantation des stratégies de contrôle. Pour ce faire, nous avons opté pour l'outil **xPC Target™** sous **Matlab®** vu que tous les développements précédents ont été réalisés dessus.

Les fréquences limites des résultats expérimentaux sont satisfaisantes et correspondent aux résultats de simulation avec une différence de  $\pm 20$  Hz sauf pour le cas *Multi-Blackman* où la différence était de 30 Hz pour la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  structurée (tableau 6.3). Ces différences sont dues au bruit de mesures, aux vibrations des déplacements des personnes dans le local des tests et des engins en circulation à l'extérieur.

Enfin, ce projet a permis d'implanter trois stratégies de contrôle afin de poursuivre des signaux de référence particuliers en appliquant une méthode de synthèse classique et deux méthodes robustes. Les résultats obtenus ont démontré une grande amélioration dans le comportement du système, ce qui devrait augmenter la qualité des mesures pour la caractérisation des propriétés viscoélastiques des matériaux.

## 7.2 Perspectives

- Au niveau des stratégies de contrôle, d'autres méthodes de synthèse peuvent être explorées et comparées aux performances des stratégies utilisées dans ce mémoire. En effet, la  $\mu$ -synthèse qui est une méthode robuste peut être utilisée pour le calcul d'un contrôleur robuste face aux variations de la masse. Aussi, la commande non linéaire par mode de glissement peut être envisagée afin de chercher le maximum d'énergie de l'actionneur et suivre ainsi des variations plus rapides dans le signal de référence.
- Au niveau du système de déploiement du contrôleur, la solution adoptée n'est pas portable et nécessite un ordinateur hôte, une cible et donc beaucoup d'espace. On

pourrait alors implanter le contrôleur sur des cartes d'acquisition munies de processeur sur lequel le code sera chargé. Ainsi, l'acquisition des données et le contrôle seront des parties intégrantes du rhéomètre. D'autre part, il existe également des systèmes d'exploitation fiables dédiés au contrôle en temps réel que l'on pourrait utiliser à la place de **xPC Target™**.

## RÉFÉRENCES

- ALAZARD, D., CUMER, C., APKARIAN, P., GAUVRIT, M. et FERRERES, G. (1999). *Robustesse et commande optimale*. Toulouse : Cépadues-Editions.
- AMBARDAR, A. (2007). *Digital signal processing : a modern introduction*. Thomson, Toronto, Ont.
- APKARIAN, P. (2013). Site Web. Pages Internet, <http://pierre.apkarian.free.fr/Software.html>.
- APKARIAN, P. et NOLL, D. (2006). Nonsmooth H-infinity synthesis (vol 51, pg 71, 2006). *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, 51, 382.
- APKARIAN, P. et NOLL, D. (2007). Nonsmooth optimization for multiband frequency domain control design. *AUTOMATICA*, 43, 724–731.
- BEHRENS, S., FLEMING, A. et MOHEIMANI, S. (2003). Electrodynamic vibration suppression. Agnes, GS and Wang, KW, éditeur, *Smart Structures and Materials 2003 : Damping and Isolation*. vol. 5052 de *Proceedings of SPIE*, 344–355.
- BIBEL, J. E. et MALYEVAC, D. S. (1992). Guidelines For The Selection Of Weighting Functions For H-INFINITY Control. Rapport technique, Naval Surface Warfare Center, Weapons Systems Department, Dahlgren, Virginia.
- BRÜEL & KJÆR (2012a). PRODUCT DATA Mini-shaker — Type 4810. Fiche technique, <http://www.bksv.com/doc/bp0232.pdf>.
- BRÜEL & KJÆR (2012b). PRODUCT DATA V203 Shakers. Fiche technique, <http://www.bksv.com/doc/bp2417.pdf>.
- BRÜEL & KJÆR (2012c). PRODUCT DATA Vibration Exciter — Type 4809. Fiche technique, <http://www.bksv.com/doc/bp0231.pdf>.
- DELLA FLORA, L. et GRÜNDLING, H. (2008). Time domain sinusoidal acceleration controller for an electrodynamic shaker. *IET Control Theory and Applications*, 2, 1044–1053.
- DORF, R. C. et BISHOP, R. H. (2008). *Modern Control Systems (11th Edition)*. Prentice Hall.
- DOYLE, J., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. et FRANCIS, B. (1989). State-space solutions to standard h2 and h infin ; control problems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 34, 831 –847.
- DUC, G. et FONT, S. (1999). *Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -analyse*. Paris : Hermès science.

- GAHINET, P. et APKARIAN, P. (2011). Structured h synthesis in matlab. Milano, Italy, vol. 18, 1435 – 1440.
- GARNIER, H., MENSLER, M. et RICHARD, A. (2003). Continuous-time model identification from sampled data : implementation issues and performance evaluation. *INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL*, 76, 1337–1357.
- GOMES, H. M., SANTOS GASPARETO, D., SOUZA FERREIRA, F. et THOMAS, C. (2008). A simple closed-loop active control of electrodynamic shakers by acceleration power spectral density for environmental vibration tests. *Experimental Mechanics*, 48, 683 – 692.
- JIAO, T., FARRAN, A., JIA, X. et CLIFTON, R. J. (2009). High frequency measurements of viscoelastic properties of hydrogels for vocal fold regeneration. *Experimental Mechanics*, 49, 235 – 246.
- KAZEROONI, H. (1990). Theory and experiments on tracking of repetitive signals via the LQG/LTR formalism. *International Journal of Control*, 51, 741–752.
- KEYENCE (2012). LK-G Series User’s Manual. manuel d’utilisation.
- LANG, G. et SNYDER, D. (2001). Understanding the physics of electrodynamic shaker performance. *S V Sound and Vibration*, 35, 24–33.
- LANG, G. F. (1997). Electrodynamic shaker fundamentals. *S V Sound and Vibration*, 31, 14–23.
- LJUNG, L. (1999). *System identification : theory for the user*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ.
- MACDONALD, H., GREEN, T. et WILLIAMS, B. (1993). Analysis and control of a moving coil electrodynamic actuator. *Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, 1993. Proceedings of the IECON ’93., International Conference on.* 2184 –2189 vol.3.
- MATHWORKS® (2012a). Robust Control Toolbox User’s Guide. Guide d’utilisateur, [http://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/allpdf.html#robust](http://www.mathworks.com/help/pdf_doc/allpdf.html#robust).
- MATHWORKS® (2012b). Simulink Coder™. Guide d’utilisateur, <http://www.mathworks.com/products/simulink-coder/>.
- MATHWORKS® (2012c). System Identification Toolbox User’s Guide. Guide d’utilisateur, [http://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/allpdf.html#ident](http://www.mathworks.com/help/pdf_doc/allpdf.html#ident).
- MATHWORKS® (2012d). xPC Target™. Guide d’utilisateur, <http://www.mathworks.com/products/xpctarget/>.
- NATIONAL-INSTRUMENTS™ (2012). NI 622x Specifications. Fiche technique, <http://www.ni.com/pdf/manuals/371290g.pdf>.

- OPPENHEIM, A. V., SCHAFER, R. W. et BUCK, J. R. (1999). *Discrete-time signal processing*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.
- PARKER, K. J., DOYLEY, M. M. et RUBENS, D. J. (2012). Imaging the elastic properties of tissue : the 20 year perspective (vol 56, pg R1, 2011). *Physics in Medicine and Biology*, 57.
- RANA, K. (2011). Fuzzy control of an electrodynamic shaker for automotive and aerospace vibration testing. *Expert Systems with Applications*, 38, 11335 – 11346.
- RICCI, S., PEETERS, B., FETTER, R., BOLAND, D. et DEBILLE, J. (2009). Virtual shaker testing for predicting and improving vibration test performance. Orlando, FL, United states, Society for Experimental Mechanics (SEM) –.
- SAYDY, L., TITS, A. et ABED, E. (1990). Guardian Maps And The Generalized Stability Of Parametrized Families Of Matrices And Polynomials. *Mathematics Of Control Signals And Systems*, 3, 345–371.
- SÖDERSTRÖM, T. (1989). *System identification*. Prentice Hall, New York.
- SHINNERS, S. (1992). *Modern control system theory and design*. J. Wiley, New York.
- SILVA, C. W. D. (2007). *Vibration : Fundamentals and Practice*. Boca Raton, Fla. : CRC Taylor & Francis, seconde édition.
- STEWARTAUDIO (2012). AV Series Power Amplifier. Fiche technique, <http://www.stewartaudio.com/manuals/AV50-2-Manual.pdf>.
- STÉPHANOS, C. (1900). Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 73–128.
- UCHIYAMA, Y. et FUJITA, M. (2003). Application of two-degree-of-freedom control to multi-axis electrodynamic shaking system using  $\mu$ -synthesis and adaptive filter. *JSME International Journal, Series C : Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, 46, 828–834.
- UCHIYAMA, Y. et FUJITA, M. (2006). Robust acceleration and displacement control of electrodynamic shaker. 746–751.
- UCHIYAMA, Y. et FUJITA, M. (2009). Robust Control using Disturbance Force Compensator and Time Waveform Replication for an Electrodynamic Shaker. *2009 IEEE Control Applications CCA & Intelligent Control (ISIC), VOLS 1-3*. IEEE International Conference on Control Applications, 806–811.
- UCHIYAMA, Y., MUKAI, M. et FUJITA, M. (2009). Robust control of electrodynamic shaker with 2dof control using  $H_\infty$  filter. *Journal of Sound and Vibration*, 326, 75 – 87.



VAROTO, P. et DE OLIVEIRA, L. (2002). Interaction between a vibration exciter and the structure under test. *Sound and Vibration*, 36, 20–26.

ZHOU, K. et DOYLE, J. C. (1998). *Essentials of robust control*. Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall.

ZHUGE, J., FORMENTI, D. et RICHARDSON, M. (2010). A brief history of modern digital shaker controllers. *Sound & Vibration*, 44, 12 – 16.

## ANNEXE A

### A.1 Génération des signaux de référence

Il existe différents types de fenêtres, p. ex. les fenêtres rectangulaires, triangulaires, Hannings, etc.

Celle utilisée dans notre application est la fenêtre *Blackman*.

Son expression est définie par (Oppenheim *et al.*, 1999; Ambardar, 2007) :

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où  $M$  est la largeur de la fenêtre.

Pour  $M = 50$ , la fenêtre correspondante est la suivante :

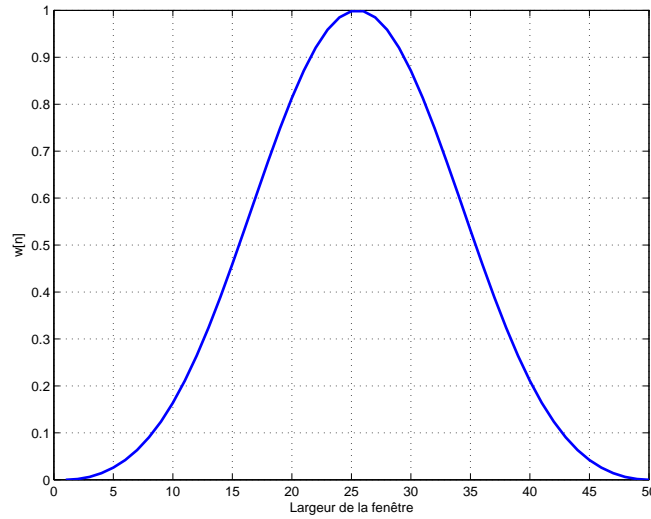


Figure A.1 Fenêtre de *Blackman* pour 50 points

Ce signal est multiplié ensuite par l'entrée à pondérer en ajustant la largeur de la fenêtre aux mêmes nombres de points que celui du signal à modifier. Cette technique est utilisée dans l'analyse spectrale des signaux et dans la synthèse de certains filtres.

Son spectre montre que les amplitudes des lobes secondaires sont considérablement diminuées

et l'énergie du signal résultant est plus concentrée autour de la fréquence du signal original. Les deux figures suivantes illustrent graphiquement le processus de fenêtrage dans les deux cas d'étude de ce projet.

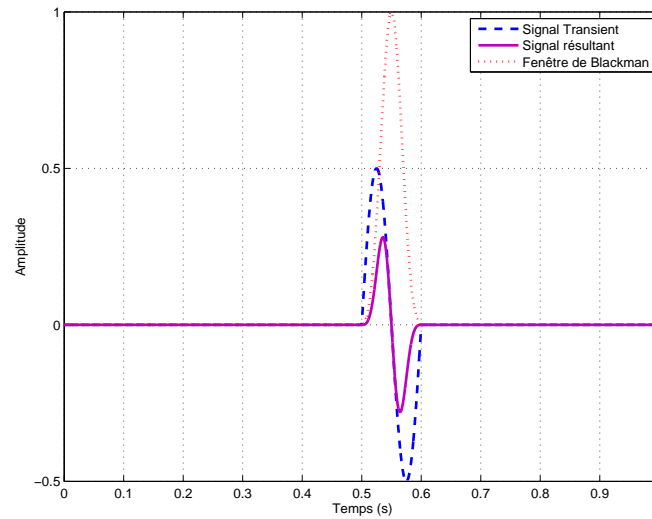


Figure A.2 Entrée *Blackman* avec un seul cycle

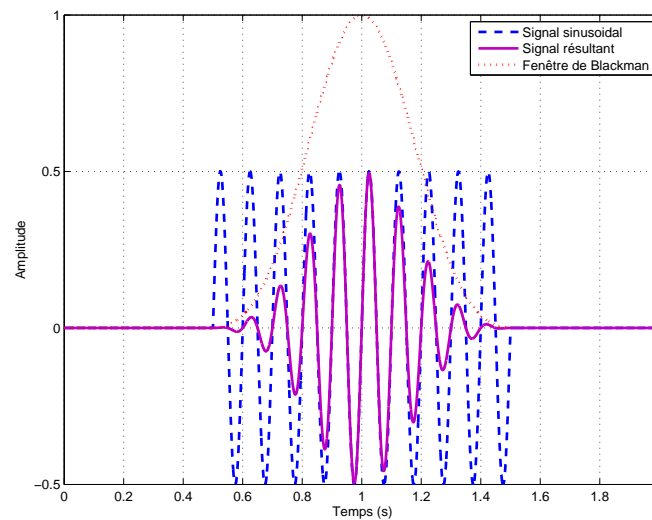


Figure A.3 Entrée *Blackman* à 10 cycles

## ANNEXE B

### Résultats numériques d'identification

Les résultats numériques d'identification des paramètres des trois pots vibrants sont regroupés dans les tableaux des sections B.1, B.2 et B.3. La section B.4, quant à elle, regroupent les données expérimentales de la réponse fréquentielle du pot vibrant #3 afin de valider le modèle obtenu à l'aide du diagramme de Bode.

#### B.1 Résultats numériques d'identification : pot vibrant #1

Tableau B.1 Résultats de l'identification du paramètre  $a_{11}$

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$M_1$	153910.46	149089.43	145483.17	138636.63	139085.00	135631.86
$M_2$	110903.80	106919.78	103891.98	101486.09	100713.19	100586.50
$M_3$	79064.75	76333.96	75226.26	72891.26	71653.32	80090.82
$M_5$	50964.26	49739.21	49146.36	47061.63	51677.06	44748.87
$M_6$	45557.86	44232.09	43639.54	45418.50	47196.92	50236.50

Tableau B.2 Résultats de l'identification du paramètre  $b_{12}$

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$M_1$	213.53	209.91	208.35	200.10	193.38	186.54
$M_2$	158.36	155.12	155.86	157.27	154.40	149.86
$M_3$	117.07	115.05	115.33	116.41	114.08	108.09
$M_5$	80.15	80.13	81.20	76.47	73.18	71.30
$M_6$	73.08	70.81	71.23	71.24	71.25	70.12

Tableau B.3 Résultats de l'identification du paramètre  $b_{13}$ 

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
$M_1$	139997.90	138473.52	137318.91	135886.25	134720.8	135429.9
$M_2$	103218.25	102980.11	102777.97	101995.70	101783.23	101270.00
$M_3$	76521.25	76443.89	76636.95	76132.18	75511.67	74272.46
$M_5$	55452.07	55399.74	56015.46	55342.51	55163.27	57123.39
$M_6$	51557.83	52359.13	52221.37	51892.50	51563.94	51377.00

## B.2 Résultats numériques d'identification : pot vibrant #2

Tableau B.4 Résultats de l'identification du paramètre  $a_{21}$ 

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$
$M_1$	297968.08	291534.69	310259.47	293307.55	276475.70	269511.69	256060.11	-223554546.33
$M_2$	185470.96	213815.10	229748.06	215565.79	203454.96	195057.33	189912.40	177028.14
$M_3$	142133.70	164496.91	176606.24	167451.98	160566.81	160311.44	153284.80	138737.33
$M_4$	109854.95	125664.94	134610.36	128599.59	132885.49	-238448270.74	121236.96	127256.24
$M_5$	90071.99	117074.04	112027.43	109209.79	102676.04	108582.22	107649.32	112441.88
$M_6$	86466.72	110119.64	104111.53	100707.65	11094.62	1141.87	110479.26	-115737972.78

Tableau B.5 Résultats de l'identification du paramètre  $b_{22}$ 

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$
$M_1$	292.07	333.19	347.52	339.49	334.10	329.81	326.41	6355.11
$M_2$	206.99	246.98	262.96	249.76	241.82	236.83	232.50	228.42
$M_3$	162.09	195.02	205.03	205.90	199.35	193.13	184.82	178.53
$M_4$	126.26	152.53	156.91	159.93	168.56	8010.17	167.25	168.52
$M_5$	107.73	131.79	132.44	132.22	130.93	134.25	151.79	145.82
$M_6$	103.36	125.80	123.98	127.46	14940.71	16512.54	133.53	8768.79

Tableau B.6 Résultats de l'identification du paramètre  $b_{23}$ 

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$
$M_1$	91711.73	115763.53	101761.36	101807.24	103253.35	103334.87	102777.68	24687258835
$M_2$	76216.36	86009.93	75360.88	74027.56	73562.55	71177.38	69633.15	70642.20
$M_3$	59666.50	66623.44	58679.5	58121.45	56256.22	55222.81	53323.04	51032.78
$M_4$	46761.87	52203.96	45873.75	45902.29	52824.76	24693808449	45580.64	49242.20
$M_5$	39724.32	39877.63	39356.89	39341.99	40408.21	44068.43	41319.20	40310.23
$M_6$	38251.85	37103.49	37298.88	37712.77	24674017740	24674008655	40579.20	14659693390

### B.3 Résultats numériques d'identification : pot vibrant #3

Tableau B.7 Résultats de l'identification du paramètre  $a_{31}$ 

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
Expérience #1	348724.585	315089.3452	234335.0886	223805.4993
Expérience #2	346955.1973	313490.6187	237166.989	224051.6609
Expérience #3	345306.3007	312000.7618	237213.2258	223856.2778
Expérience #4	345508.3376	312183.3118	237081.5421	223671.4753
Expérience #5	345948.9339	312581.4116	237402.7478	224320.4172

Tableau B.8 Résultats de l'identification du paramètre  $a_{32}$ 

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
Expérience #1	1318581.473	1228638.392	865723.3758	731590.3829
Expérience #2	1171911.6775	1091973.2368	909115.694	718342.6315
Expérience #3	1164130.6941	1084723.0099	855609.1215	731022.6563
Expérience #4	1155111.7992	1076319.3118	871750.6349	735267.4321
Expérience #5	1175069.0214	1094915.212	861134.05	734513.1708

Tableau B.9 Résultats de l'identification du paramètre  $b_{32}$ 

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$
Expérience #1	594.1155	537.038	418.431	397.6683
Expérience #2	588.71	532.1518	422.8267	398.2801
Expérience #3	585.8771	529.5911	426.1313	397.5339
Expérience #4	586.1697	529.8556	426.4879	397.6755
Expérience #5	588.5485	532.0059	427.75	398.9911

Tableau B.10 Résultats de l'identification du paramètre  $b_{33}$ 

	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>
Expérience #1	104678.6772	95710.5745	73824.905	67682.1599
Expérience #2	103671.9616	94790.1069	74402.0271	67717.8019
Expérience #3	103199.151	94357.8032	74337.6517	67688.0839
Expérience #4	103311.2318	94460.2818	74283.9174	67646.6807
Expérience #5	103359.5514	94504.4617	74195.882	67788.5932

Tableau B.11 Résultats de l'identification du paramètre  $b_{34}$ 

	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>
Expérience #1	5455921.2128	4925726.8921	3829904.6313	3460929.4371
Expérience #2	5413954.5958	4887838.4978	3872288.4017	3464294.2366
Expérience #3	5387378.1407	4863844.6837	3873859.0483	3456995.3656
Expérience #4	5379273.9897	4856528.0761	3873265.5087	3458823.4506
Expérience #5	5401330.1209	4876440.8414	3870532.4189	3467037.0164

Tableau B.12 Résultats de l'identification du paramètre  $b_{35}$ 

	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>
Expérience #1	95893128.2792	86538525.9527	64255799.0014	57818574.0132
Expérience #2	91567052.4158	82634469.0604	65497796.3984	57438047.6746
Expérience #3	91289856.4771	82384314.2436	64394874.2824	57645595.5859
Expérience #4	91063449.0197	82179993.3712	64843028.5432	57673011.3406
Expérience #5	91523558.086	82595217.7057	64749758.7298	57882607.5642

## B.4 Données Expérimentales de la réponse fréquentielle

L'amplitude du signal d'entrée est égale à 0.4 V.

Tableau B.13 – Mesures de la réponse fréquentielle du pot vibrant #3 – Masse  $M_2$

Fréquence (rad/s)	Déplacement (mm)	Rapport d'amplitude (dB)
31.4159	0.8102	6.1306
43.9823	1.14	9.0969
56.5487	1.32	10.3703
62.8319	1.41	10.9432
69.115	1.462	11.2577
75.3982	1.493	11.44
81.6814	1.514	11.5613
87.9646	1.521	11.6014
94.2478	1.539	11.7036
100.531	1.521	11.6014
106.8142	1.518	11.5842
113.0973	1.504	11.5038
119.3805	1.493	11.44
125.6637	1.476	11.3405
131.9469	1.467	11.2874
138.2301	1.441	11.1321
157.0796	1.39	10.8191
175.9292	1.31	10.3042
188.4956	1.263	9.9869
207.3451	1.194	9.4989
219.9115	1.152	9.1878
238.761	1.1	8.7867
251.3274	1.054	8.4156
270.177	0.993	7.8978
282.7433	0.95	7.5133
301.5929	0.885	6.8977
314.1593	0.865	6.6991

*(Suite à la page suivante)*



Tableau B.13 – suite de la page précédente

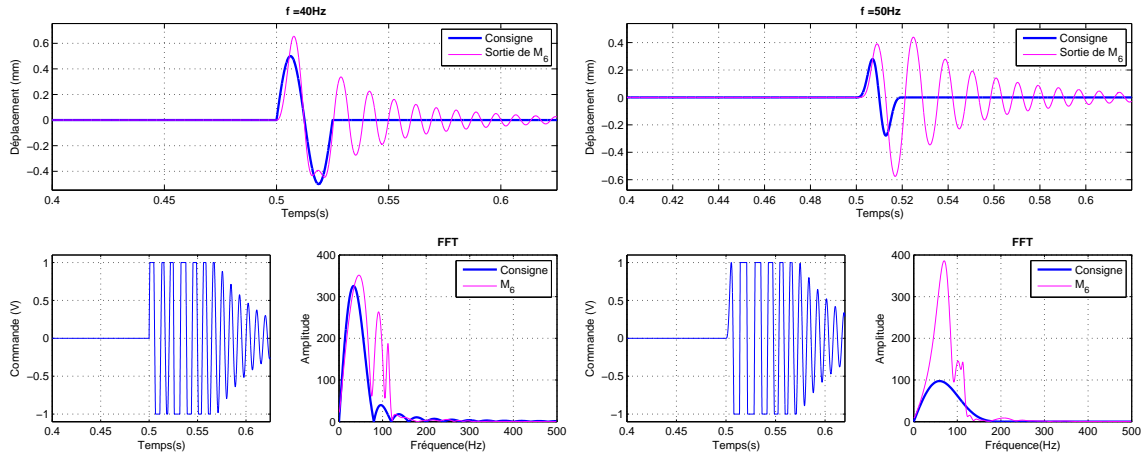
Fréquence (rad/s)	Déplacement (mm)	Rapport d'amplitude (dB)
345.5752	0.787	5.8783
376.9911	0.694	4.786
408.407	0.626	3.8903
439.823	0.569	3.061
471.2389	0.495	1.8509
502.6548	0.454	1.0999
534.0708	0.418	0.38233
565.4867	0.372	-0.63034
596.9026	0.329	-1.6973
628.3185	0.299	-2.5278
691.1504	0.231	-4.769
753.9822	0.21	-5.5968
816.8141	0.181	-6.8876
879.6459	0.153	-8.3474
942.4778	0.11	-11.2133
1005.3096	0.087	-13.2508
1068.1415	0.082	-13.7649
1130.9734	0.08	-13.9794
1193.8052	0.07	-15.1392
1256.6371	0.067	-15.5197

## ANNEXE C

### Listes des figures des réponses aux fréquences limites en simulation

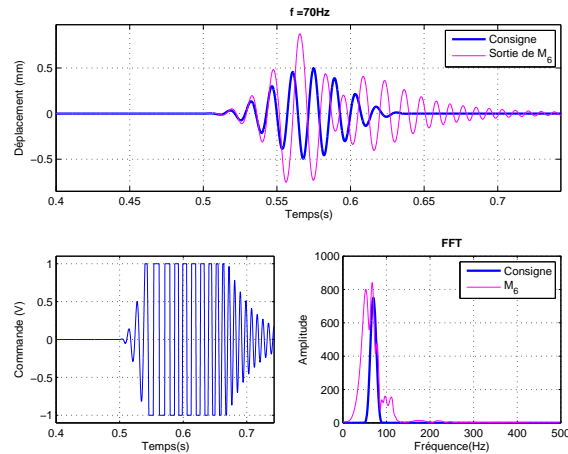
Nous présentons dans cette annexe les résultats de simulation des fréquences limites des contrôleurs développés au chapitre 5. Les résultats du pot vibrant #1 sont exposés dans la section C.1 alors que ceux du pot vibrant #3 sont exposés dans la section C.2.

#### C.1 Fréquences limites : Pot vibrant #1



(a) Entrée *Transient* à 40 Hz

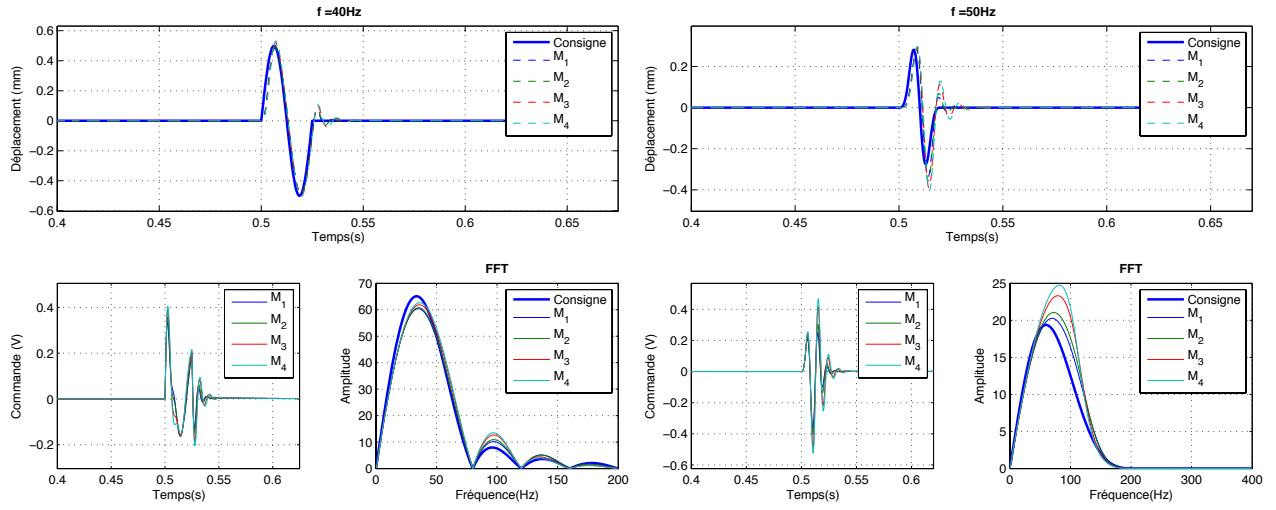
(b) Entrée *Blackman* à 50 Hz



(c) Entrée *Multi-Blackman* à 70 Hz

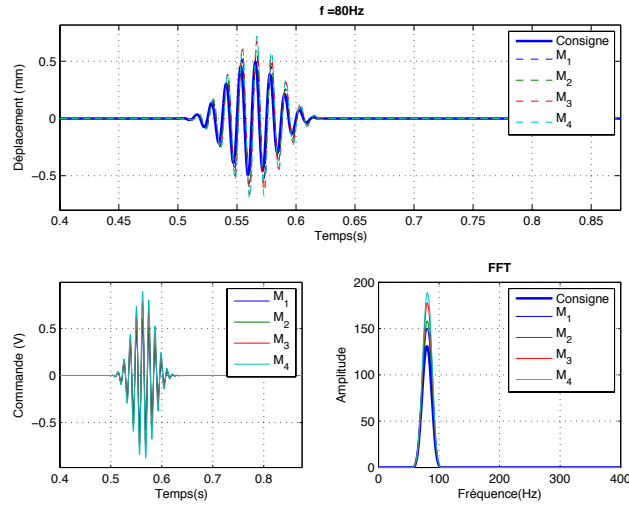
Figure C.1 Limites du contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #1

## C.2 Fréquences limites : Pot vibrant #3



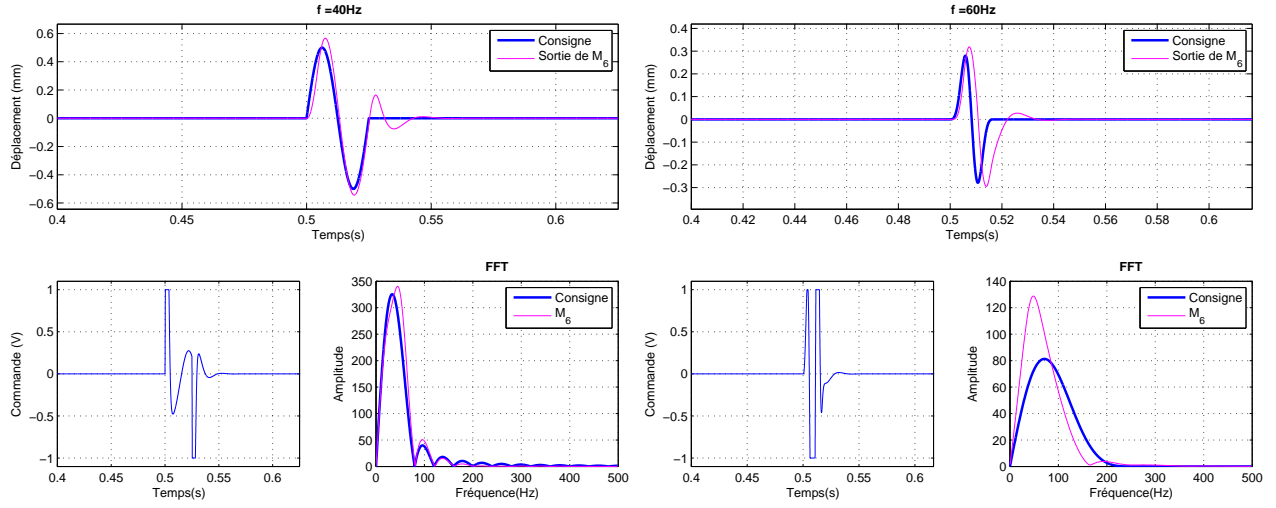
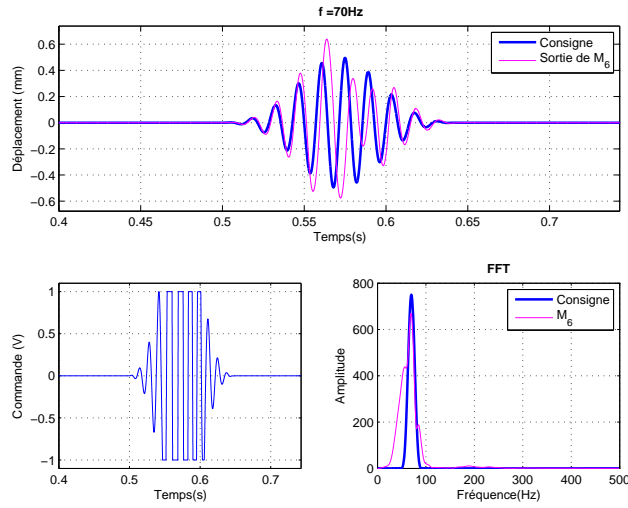
(a) Entrée *Transient* à 40 Hz

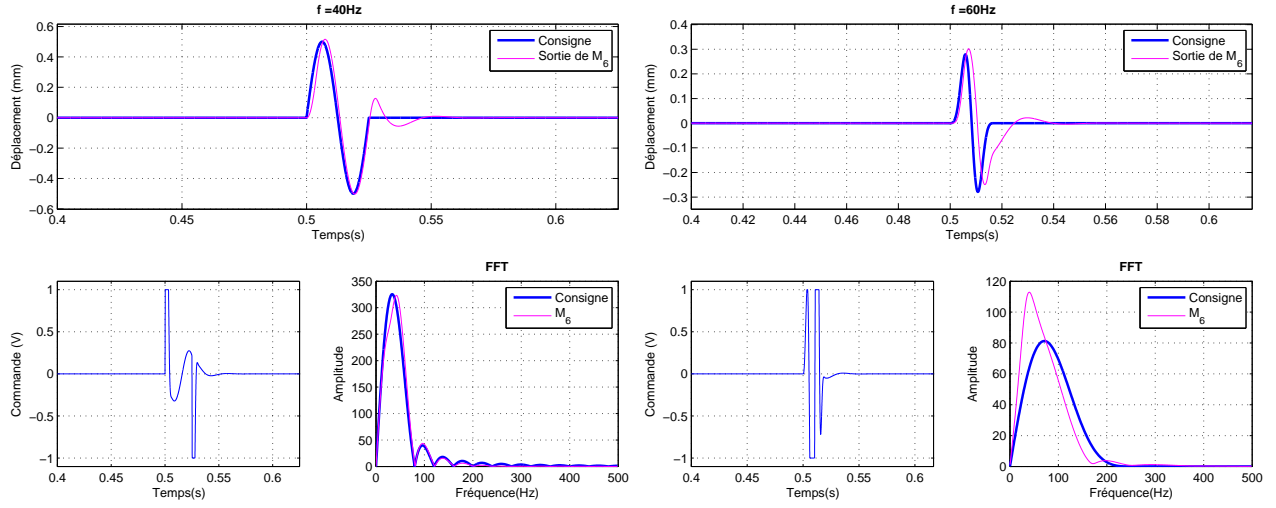
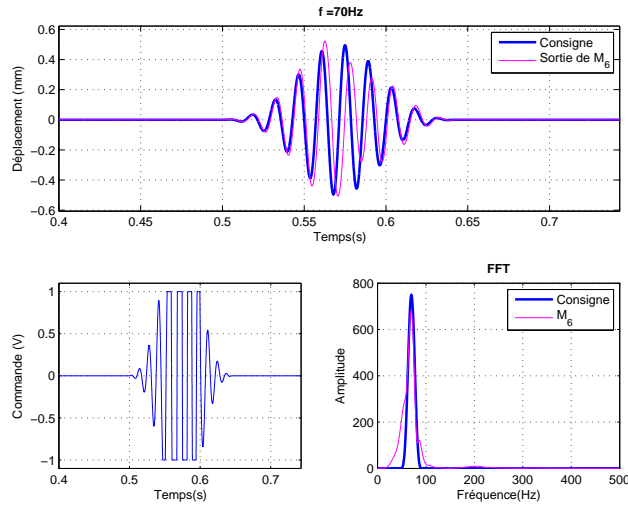
(b) Entrée *Blackman* à 50 Hz

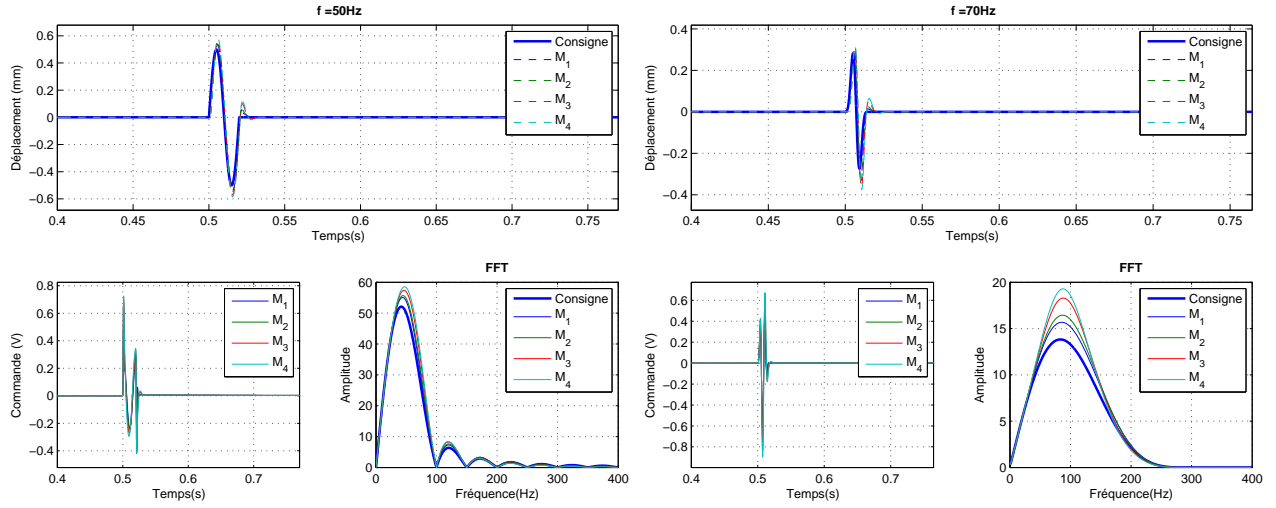
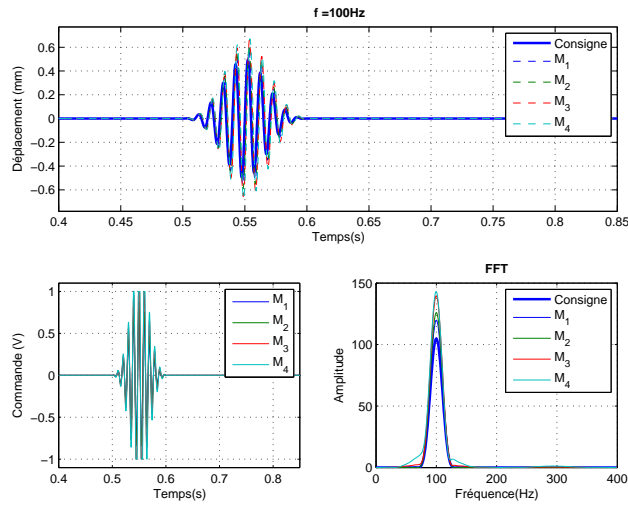


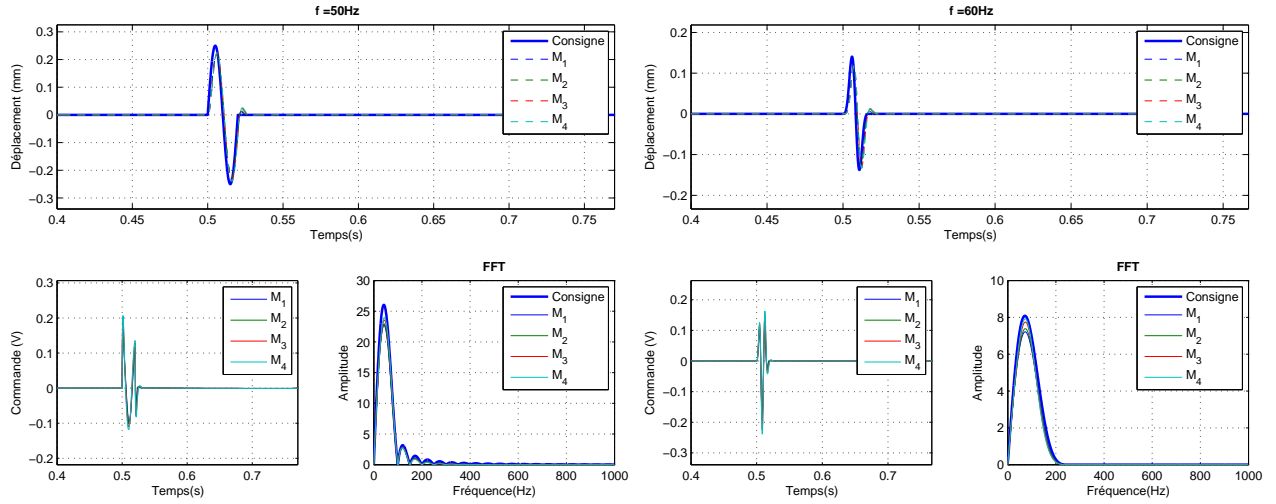
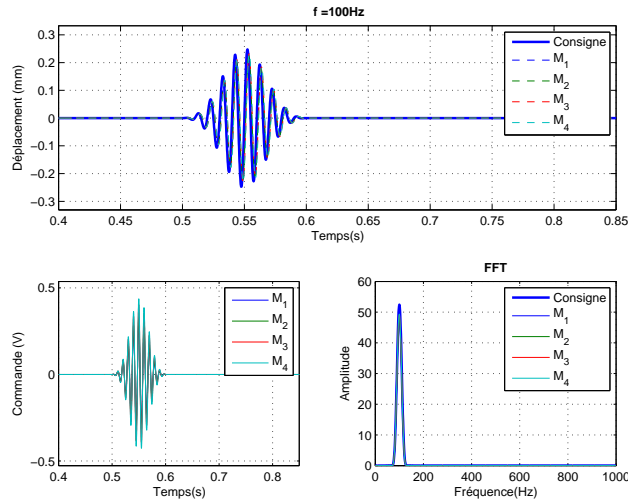
(c) Entrée *Multi-Blackman* à 80 Hz

Figure C.4 Limites du contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #3

(a) Entrée *Transient* à 40 Hz(b) Entrée *Blackman* à 60 Hz(c) Entrée *Multi-Blackman* à 70 HzFigure C.2 Limites du contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  – Pot vibrant #1

(a) Entrée *Transient* à 40 Hz(b) Entrée *Blackman* à 60 Hz(c) Entrée *Multi-Blackman* à 70 HzFigure C.3 Limites du contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structuré – Pot vibrant #1

(a) Entrée *Transient* à 50 Hz(b) Entrée *Blackman* à 70 Hz(c) Entrée *Multi-Blackman* à 100 HzFigure C.5 Limites du contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  – Pot vibrant #3

(a) Entrée *Transient* à 50 Hz(b) Entrée *Blackman* à 70 Hz(c) Entrée *Multi-Blackman* à 100 HzFigure C.6 Limites du contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structuré – Pot vibrant #3

## ANNEXE D

## D.1 Figures des réponses aux fréquences limites en expérimentation

On présente dans cette annexe la réponse obtenue en expérimentation du pot vibrant #3 aux fréquences limites. La masse utilisée est celle du plus grand porte-échantillon  $M_4 = 135.9$  g.

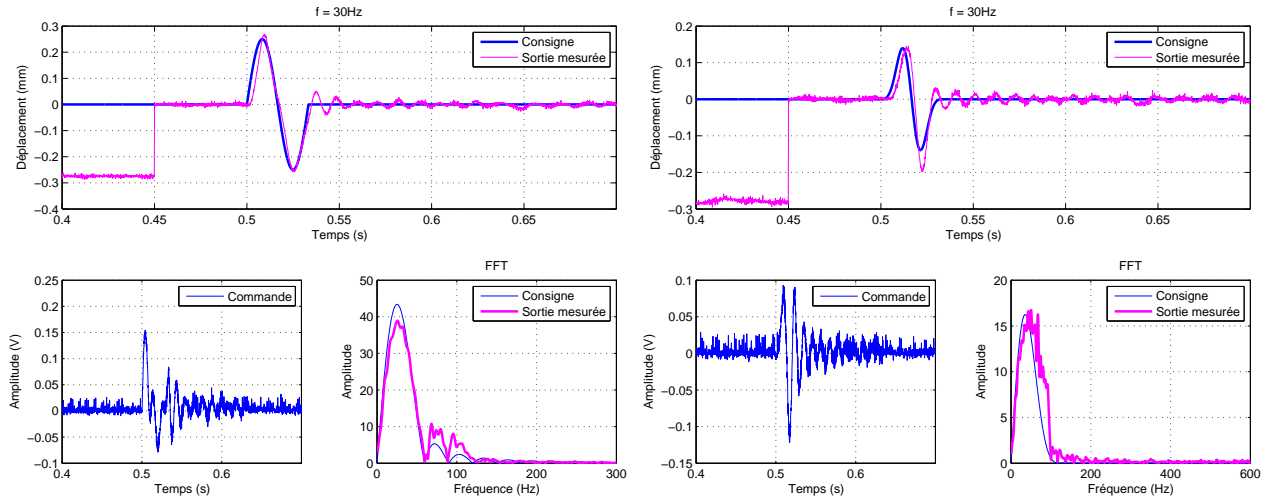
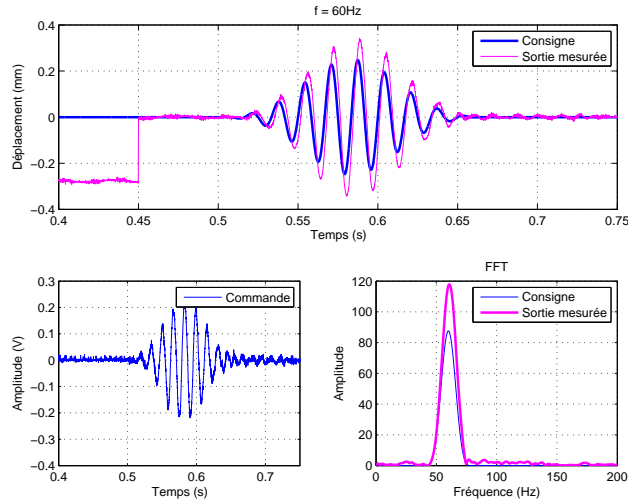
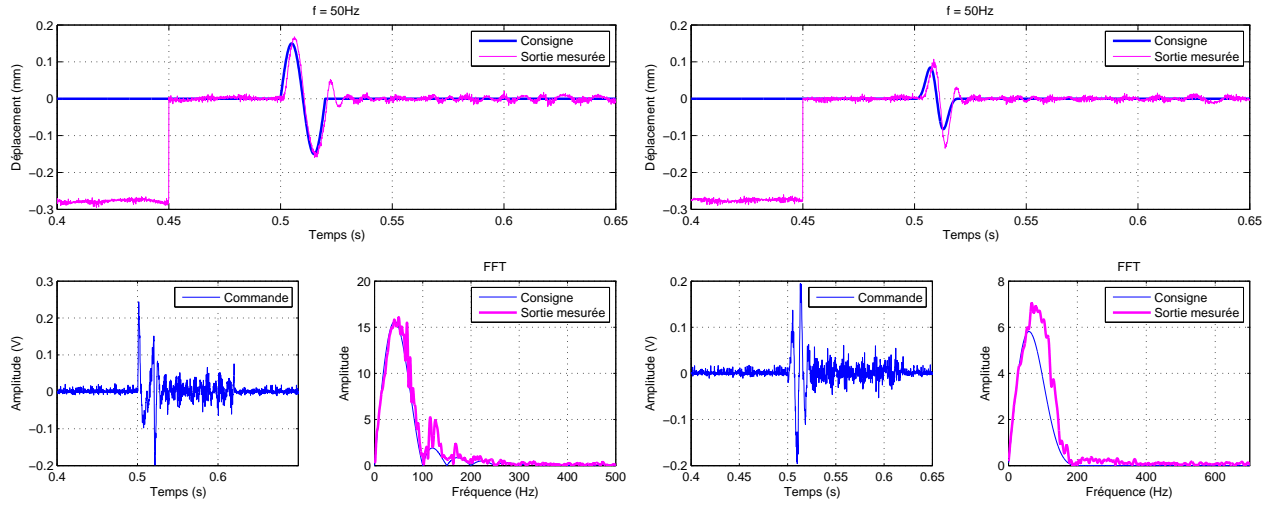
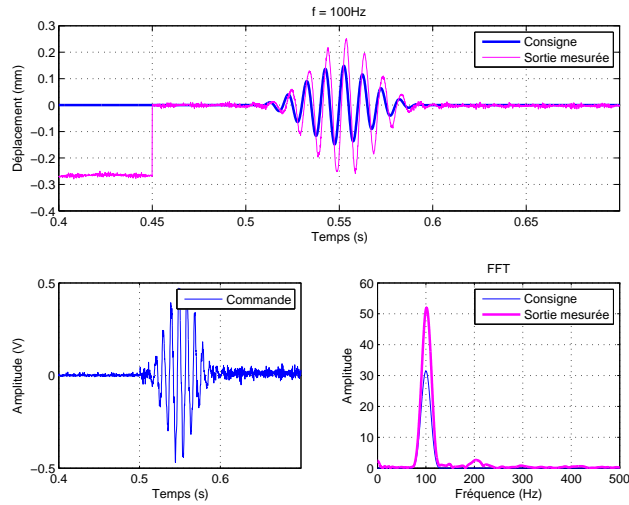
(a) Entrée *Transient* à 30 Hz(b) Entrée *Blackman* à 30 Hz(c) Entrée *Multi-Blackman* à 60 Hz

Figure D.1 Limites expérimentales du contrôleur à retard de phase – Pot vibrant #3



(a) Entrée *Transient* à 50 Hz(b) Entrée *Blackman* à 50 Hz(c) Entrée *Multi-Blackman* à 100 HzFigure D.2 Limites expérimentales du contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  – Pot vibrant #3

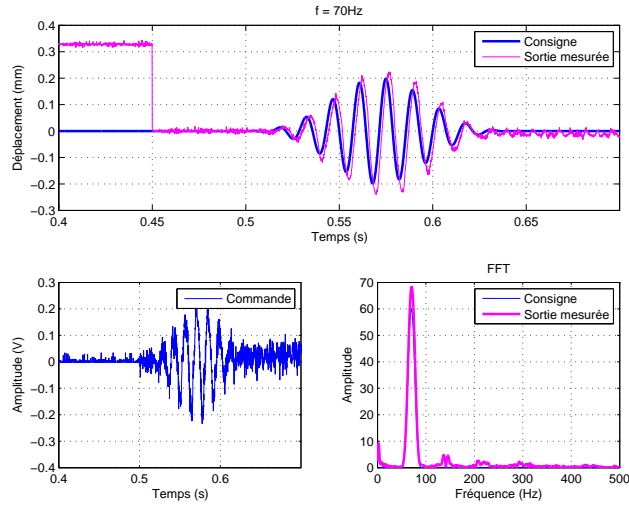
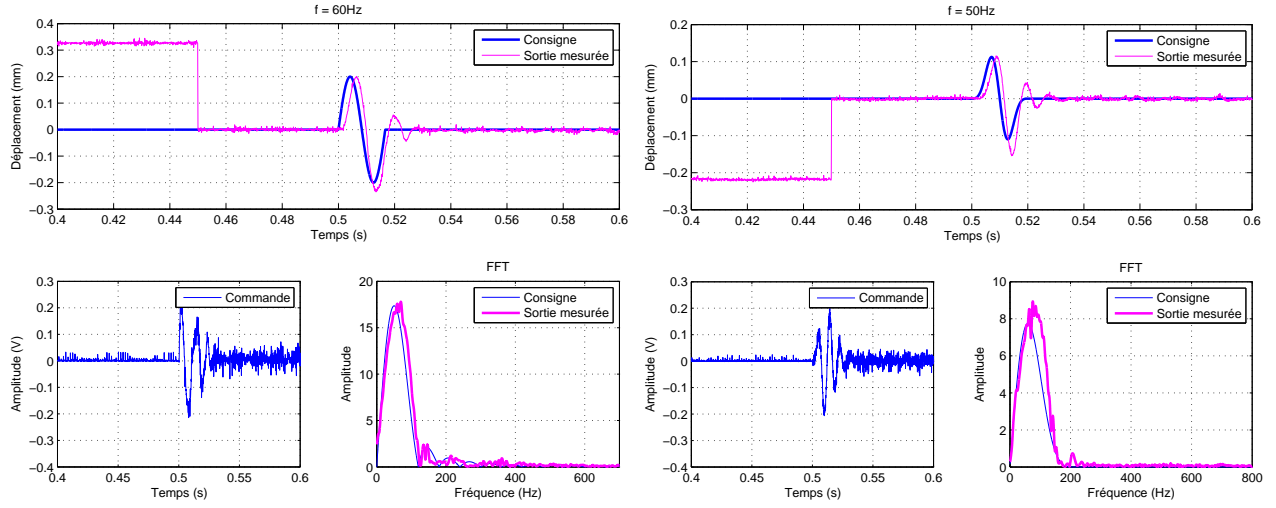


Figure D.3 Limites expérimentales du contrôleur  $\mathcal{H}_\infty$  structurées – Pot vibrant #3